Convenio IICA-CORFO Río Colorado

Fondo Simón Bolívar IICA-OEA
Proyecto (IV.XSA.21)

V A D E M E C U M

TOMO XIII
(Misceláneos)

PROGRAMACION LINEAL Y EVALUACION DE PROYECTOS DE INVERSION

- Noviembre 1982 -

Pedro Luro - ARGENTINA

Convenio IICA-CORFO Río Colorado

Fondo Simón Bolívar IICA-OEA
Proyecto (IV.XSA.21)

V A D E M E C U M

TOMO XIII
(Misceláneos)

PROGRAMACION LINEAL Y EVALUACION DE PROYECTOS DE INVERSION

- Noviembre 1982 -

Pedro Luro - ARGENTINA

00007611

0~~02806~~

GRUPO DE TRABAJO:

IICA	Ing.Ind. e Ing.Agr.	FREDDIE SILVA
IICA	Ing.Agr.	OLGA WAGNER
CORFO	Ing.Rural	RUBEN MENECHELLA
IICA	Sra.	ANA M. T. de VIDAL

COLABORACION ESPECIAL:

Dr. ROBERTO VASQUEZ PLATERO

Lic. JORGE GINNOBILI

Ing. SAUL UBICI

TOMO XIII - MISCELANEOS

	Pág.
CAPITULO I	
1. Observaciones sobre Programación Lineal	1
1.1. Plan de Producción	1
1.1.1. Simulación	2
1.1.2. Optimización	2
2. La Técnica de Programación Lineal	2
2.1. Aplicación de la Programación Lineal	3
2.2. Restricción	3
2.3. Variables	4
2.4. Proporcionalidad	4
2.5. Aditividad	4
2.6. Generalidades	5
2.7. Observaciones	6
3. Modelo matemático del Problema	6
3.1. Maximización de la función objetivo	6
3.2. Minimización de la función objetivo	7
4. Procedimientos de Programación Lineal	8
4.1. Análisis o Método Gráfico	9
4.1.1. Investigación de Vértices	10
4.1.2. Pendiente de la recta	10
4.1.3. Desarrollo del Caso 1 (Maximización - Granja La Pradera)	10
4.1.4. Planteo del Problema	11
4.1.5. Aplicación Método Gráfico	12
4.1.5.1. Superficie óptima	16
4.1.6. Investigación de Vértices	16
4.1.7. Desarrollo del Caso 2 (Maximización - San Ignacio)	17
4.1.7.1. Obtención del valor extremo de la función objetivo	21
4.1.8. Caso 3 (Criadero de Aves - Minimización)	24
4.1.8.1. Desarrollo del caso	24
4.1.8.2. Planteo	24
4.1.8.3. Análisis gráfico	25
4.1.8.4. Investigación de vértices	26
4.1.9. Desarrollo del Caso 4 (Ganadería - Minimización)	27
5. Método Intuitivo o Económico	30
5.1. Caso 5 (Planta de Semillas - Maximizar)	31

5.1.1. Resolución 32
5.1.1.1. Capacidad ociosa 32
5.1.1.2. Solución de no producir nada (Trivial) 33
5.1.1.3. Producción Máxima del producto de mayor rendimiento 33
5.1.1.4. Producción mixta 34
5.1.1.5. Costo de Oportunidad 34
5.1.1.6. Análisis de Conveniencia 35

6. Método Simplex 38
6.1. Definición 38
6.2. Solución 39
6.3. Método 40
6.3.1. Primer paso 40
6.3.2. Desarrollo 40
6.3.2.1. Sistema de Búsqueda 41
6.3.2.2. Sistema de Cómputo 41
6.3.3. Segundo paso 42
6.3.4. Programa cero 42
6.3.5. Pasos sucesivos 43
6.3.6. Consideraciones 43
6.4. Caso N°6 (FOCO S.A. - Maximización) 43
6.4.1. Conclusiones del caso 54
6.5. Caso N°7 (Fertilizantes - Minimización) 55

7. Tipos de Restricciones en Programación Lineal 63
7.1. Restricciones del tipo menor o igual 64
7.2. Restricciones del tipo mayor o igual 65
7.3. Restricciones del tipo igual a cero 67
7.4. Restricciones del tipo mayor estricto o menor estricto 68
7.5. Resumen

8. Caso N°8 (Peletizadora) 69
8.1. Maximización y una mezcla de restricciones $\leq$ y $\geq$ 69
8.2. Planteo del problema 70
8.3. Resolución (Método Simplex) 70

9. Método Dual 75
9.1. Relaciones entre el problema directo y el dual 75
9.2. Problema dual a partir de la matriz óptima 78
9.2.1. Planteo del caso 78
9.2.2. Solución dual 79

10. Interpretación de resultados 81
10.1. Restricciones del tipo igual estricto (Maximización) 84
10.2. Minimización - Restricciones del tipo $\geq$ 85
10.3. Combinación de restricciones 87

11. Construcción de modelos de programación lineal para computadora 88
11.1. Análisis de casos 89
11.2. Caso N°9 (Empresa hipotética) 89

11.2.1. Resolución 92
11.2.2. Costo de Oportunidad 92
11.2.3. Costo de sustitución 96
11.3. Caso N°10 (Agroindustria) Programa de producción de alimentos 96
11.3.1. Datos 96
11.3.2. Planteo 98
11.3.3. Función objetivo 98
11.3.4. Restricciones 98
11.3.5. Solución por computadora 102
11.3.6. Programa óptimo 103

12. Análisis de Estabilidad de una solución de Programación lineal 104
12.1. Análisis de costos de sustitución 104
12.2. Cálculos adicionales efectuados por la computadora 105
12.3. Parametraje 105

13. Matrices 107
13.1. Utilización del suelo 107
13.2. Rotaciones 108
13.3. Calidad del suelo 110
13.4. Capacidad de uso 110
13.5. Mano de obra 113
13.6. Horas extras 114
13.7. Mano de obra eventual 115
13.8. Maquinaria y mejoras 115
13.9. Forrajes 116
13.10. Agregación y desagregación de actividades 117
13.10.1. Modelo agregado 119
13.10.2. Modelo desagregado 119
13.11. Transferencia de actividades 121
13.12. Introducción Forzada de una actividad 122

<u>INDICE DE CASOS CAPITULO I</u>

Caso 1 - Granja "La Pradera" (Cebolla y Ajo) 10
Caso 2 - Granja San Ignacio (Ganadería-Agricultura) 17
Caso 3 - Criadero de Aves (Alimento balanceado) 24
Caso 4 - Ganadería (Ración balanceado para sobre alimento) 27
Caso 5 - PROSEMCOOP (Semillas alfalfa) 31
Caso 6 - FOCO S A. (Pimiento y [illegible]pa) 43
Caso 7 - Granja Buratovich (Fertilizantes) [illegible]
Caso 8 - Peletizadora (Harina y pastillas de alfalfa 60
Caso 9 - Empresa Agropecuaria hipotética 89
Caso 10- Agroindustria (Programa de producción de alimentos) 96

	Pág.
Anexos del Capitulo I	123
CAPITULO II	130
1. Evaluación de Proyectos de Inversión	130
2. Optimización de un recurso	131
3. Proceso de evaluación	131
4. Aspectos generales	131
4.1. Base de análisis Financiero-Económico	131
4.2. Costos y beneficios	131
4.3. Cash-Flow	132
4.4. Presupuesto de Capital	132
4.5. Etapas de evaluación	132
4.6. Incertidumbre	132
4.7. Medidas de evaluación que no consideran el efecto del tiempo	133
4.8. Concepto del Valor Presente en una suma futura	134
4.9. Interés compuesto	134
4.10.Valor Actual	134
5. Precio Sombra	134
5.1. Precios sobra y el análisis de sensibilidad	135
5.2. Diagrama explicativo de la sensibilidad	135
5.3. Precio sombra de la mano de obra	136
5.3.1. Primer método del cálculo	136
5.3.2. Segundo método	137
5.4. Precio sombra de la divisa	138
5.4.1. Primer método	138
5.4.2. Segundo método PSD	139
6. Ejemplo de Aplicación	139
6.1. Evaluación financiera	139
6.2. Medidas e indicadores de evaluación	140
6.3. Cálculo del VP	140
6.4. Cálculo de la Relación B/CF	141
6.5. Cálculo de la TIR	142
7. Evaluación Económica	144
8. Análisis de Sensibilidad	144

CAPITULO I

1. Observaciones sobre Programación Lineal

La programación lineal es un método realmente interesante para los casos de análisis muy complejos, cuyos modelos implican analizar todas las actividades posibles, así como también el funcionamiento interno de la empresa y su estructura de producción.

Los aspectos más importantes para este análisis son:

a. Agronómicos
b. Trabajos agrícolas
c. Producción animal
d. Limitaciones en los recursos y relaciones con el exterior
e. Superficie
f. Suministro de agua
g. Capital de trabajo, etc.

Analizando estos aspectos vemos que la aplicación de programación lineal se enmarcaría en dos categorías:

- Economía de granjas y
- Administración de las granjas

La primera trata de los aspectos de economía agrícola, relacionada con la región, estado o nación, en tanto que la segunda se refiere a los problemas que solo atañen a las granjas en particular en forma de empresas agropecuarias.

Estas empresas constituyen una unidad de producción, en las que se realizan diferentes procesos productivos (actividades) y que cuenta con recursos disponibles en cantidades limitadas para el plan de producción.

1.1. Plan de Producción

La toma de decisiones puede estar basada ya sea en la intuición o con la ayuda de herramientas técnicas de análisis cuya complejidad puede variar de acuerdo a las circunstancias de cada empresa.

El perfeccionamiento en los razonamientos puede alcanzarse mediante la preparación de un "modelo de desición", es decir una representación matemática de la realidad.

Los modelos corrientemente utilizados en explotaciones agropecuarias son:

- Modelos de simulación
- Modelos de optimización

1.1.1. Simulación

Métodos de presupuestos totales por aproximaciones sucesivas en la que se establece a priori planes de producción. Evaluándose luego cual de ellos es el mejor se verifica además que los recursos de la empresa permitan llevar a cabo dichos planes.

1.1.2. Optimización

Calcula el plan óptimo a partir del mejor uso de los recursos y se basa en la teoría marginalista, la cual selecciona las actividades de mayor producción marginal respecto a cada uno de los recursos. Y como uno de estos métodos se encuentra la "Programación Lineal".

2. La técnica de Programación lineal

Es en esencia, un método matemático para resolver problemas en el cual los pasos a seguir son:

a. Planteo de un modelo	Se fijan objetivos	
	Se recibe información	
b. Cuantificación y resolución del modelo	Método Gráfico	Dos variables
	Método Intuitivo	
	Método Simplex	Más de dos variables
c. Búsqueda de la solución óptima		

NOTA: Si el modelo utilizado es diferente de la situación real, la solución a que se llegue será de muy poco valor. Por el contrario, aún cuando la situación real no esté representada por el modelo con toda exactitud, si este se aproxima razonablemente a las condiciones reales se verá que el resultado obtenido para el modelo es una buena solución del problema real.

Es necesario destacar que si bien la programación lineal es un instrumento muy eficaz para analizar la complejidad económica de la empresa, sería erroneo creer que todo problema de gestión puede ser resuelto mediante esta técnica.

2.1. Aplicación de la programación lineal

Se ciñe a los problemas de decisión que cumplen con las siguientes condiciones:

- Función objetivo

  El primer requisito es el de definir un objetivo (optimización de alguna variable). Esto se denomina función objetivo que se traduce en general en la maximización de las ganancias (representadas por la contribución marginal bruta) o minimización de costos, según el problema.

  La definición y el método de medida de la función objetivo es el aspecto más difícil en este proceso. Por eso el primer paso debe ser distinguir de manera clara y precisa la función objetivo que responde a preguntas tales como:

  - Qué es lo que queremos lograr ?
  - Hacia dónde nos dirigimos ?
  - Cuál es el objetivo dominante ?
  - Cuál es la medida representativa de nuestro objetivo ?

2.2. Restricciones

Existen restricciones que nos impiden, de alguna manera, el logro del objetivo enunciado. Existen, porque los recursos con que contamos son limitados. Nos determinan el ámbito de la optimización. Debemos buscar el óptimo dentro de las restricciones no removibles durante el tiempo de aplicación de la solución.

Las restricciones son $\leq$ (menor o igual)
Pero puede haber restricciones definidas por:

Mayor o igual $\geq$
Igual $=$
Mayor $>$
Menor $<$

2.3. Variables

Cada variable representa una actividad. Como el ámbito donde se ha desarrollado fuertemente la programación lineal es el de la producción, donde las actividades son productos. Además de representar una actividad, cada variable identifica el nivel de esa actividad.

2.4. Proporcionalidad

La característica fundamental de la programación lineal son los llamados rendimientos constantes a escala. Esto significa que cierto cambio porcentual en los mismos de los factores de la producción utilizados, producen el mismo cambio porcentual en la función de productor. Ej: se duplica la cantidad utilizada de todos los factores, el volumen de producción se duplicará también. Esto es lo que en economía se llama "funciones de producción de proporciones fijas".

La programación lineal da porsupuesto una función de insumo-producto de primer grado que relaciona restricciones con el nivel de actividad.

El uso de rendimientos a escala constante corresponde o puede ser representado por una función lineal homogenea de primer grado, de allí el nombre de "Lineal".

2.5. Aditividad

Esta segunda hipótesis, que surge como consecuencia de la anterior, implica:

- En el caso de la función objetivo:
  Que la contribución marginal bruta total debe ser igual a la suma de las contribuciones marginales de cada una de las variables, en un nivel dado de actividad.

-En el caso de las restricciones:
Que el uso total de algún recurso debe ser igual a la suma de los requerimientos de ese recurso para cada proceso en un nivel dado de actividad.

2.6. Generalidades

a. Las restricciones determinan el espacio de optimización, el polígono de soluciones factibles, ya que sus puntos no violan ninguna restricción.

b. Los métodos de solución de la programación lineal constituyen un procedimiento heurístico para hallar los puntos óptimos entre infinitos puntos posibles, a través de un número finito de pasos. Como primera aproximación el método indica que en todo problema normal, la solución se halla en alguno de los vértices, lo que reduce los puntos a investigar desde infinitos a unos pocos.

c. Puede darse el caso que la recta del "funcional" coincida íntegramente en su punto óptimo con un lado del polígono. Esto sucede cuando la pendiente de la función objetivo es igual a la pendiente de una de las restricciones formuladas.
Entonces todos los puntos que se encuentren en ese segmento que es un lado del polígono serían solución del problema o, dicho de otra manera, existiría un infinito número de soluciones. Este caso se denomina "solución degenerada" del modelo. Desde un punto de vista práctico cualquiera de esas mezclas es válida como programa.

d. Si observamos los gráficos de los ejemplos propuestos y desarrollados por el método gráfico podemos observar que cualquiera de los vértices investigados está formado por dos restricciones es decir el número de productos.

Es esta una regla general de la programación lineal que se demuestra por los teoremas siguientes:

- Si el planteo del número de actividades es igual al número de restricciones, la solución tendrá ese mismo número de actividades.

- Si el planteo del número de actividades es mayor al número de restricciones, el número de actividades en la solución será igual al número de restricciones.

- Si el planteo del número de actividades es menor al número de restricciones, el número de actividades en la solución será igual el número de actividades en el planteo del problema.

2.7. Observaciones

La programación lineal deberá aplicarse cuando las hipótesis del modelo se adapte a la realidad.

Estas hipótesis generalmente no están presentes, de allí que se trabaje en el corto plazo donde sí puede suponerse que existen y es aquí entonces, - donde la programación lineal es un instrumento poderoso.

En los demás casos deberán utilizarse otras técnicas como: programación no lineal que trata de adaptarse al supuesto de rendimientos marginales decre--- cientes.

3. Modelo Matemático del Problema

Matemáticamente un modelo de programación lineal puede presentarse de dos formas de acuerdo con el objetivo:

- Maximizar la función económica ó
- Minimizar la función económica

3.1. Maximización de la función objetivo

Z = Función objetiva o económica (por ejemplo el margen bruto)

C_j = Es la variación de la función económica (Z) motivada por una unidad de la actividad P_j (por ejemplo el margen bruto por unidad de actividad).

P_j = Es el número de actividades posibles (n) siendo $j = 1.2.3...n$

X_j = Es la dimensión dada a la actividad P_j

$$\text{Maximizar } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n X_n$$

O sea:

$$Z \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

Respetando las siguientes condiciones:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} X_n \leq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} X_n \leq b_2$$

....

....

....

....

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} X_n \leq b_m$$

O sea:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$$

b_i = cantidad de recurso i disponible o dimensión de la restricción.

i = 1.2.3........m = son los m recursos o restricciones que pueden limitar la dimensión de una o varias actividades

a_{ij}= es la cantidad de recurso i requerido (o aportada) por una unidad en la actividad P_j

$X_j \geq 0$ ó sea la no negatividad de las actividades

3.2. Minimización de la función objetiva

$$\text{Minimizar} \quad Z \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

Respetando las condiciones siguientes:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots\ldots + a_{1n} X_n \geq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots\ldots + a_{2n} X_n \geq b_2$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \qquad\qquad & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{array}$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots\ldots a_{mn} X_n \geq b_m$$

O sea:

$$\sum_{j-1}^{n} a_{ij} \quad X_j \geq b_i$$

Y:

$$X_j \geq 0$$

4. Procedimiento de Programación Lineal

Existen los siguientes métodos para resolución de problemas de programación lineal.

- Análisis Gráfico
  Método Intuitivo (o económico)
  Método Simplex
  Solución Dual

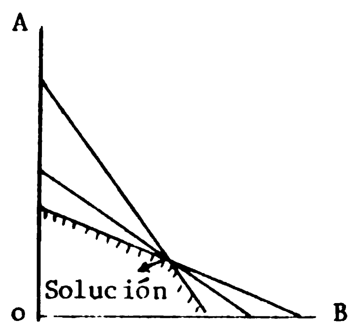
4.1. Análisis o Método Gráfico

Este método puede ser aplicado cuando se trata de no más de dos variables. Consiste en representarlos en un plano o espacio de dos dimensiones.

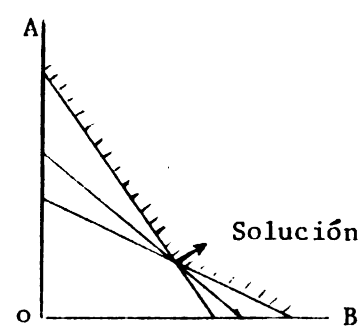
En el eje de las ordenadas se ubica las cantidades de una de las varia--- bles y en el de las absisas la segunda variable. La elección de los ejes para las variables es indistinta puesto que la solución será la misma.

Luego se grafican las restricciones de los recursos una a una, y se obtiene así el polígono de soluciones factibles. Este determina el área de las posibles soluciones. Para el caso de maximización el área será del polígono hacia abajo y para minimización estará del polígono hacia arriba.

GRAFICO N° 1



Polígono de soluciones
Maximización



Polígono de soluciones
Minimización

Se buscará luego el valor extremo de la función objetivo, es decir encontrar el punto del polígono que optimice (maximizar o minimizar) la función objetivo. Existen dos procedimientos:

- Investigación de vértices y
- La pendiente de la recta

4.1.1. Investigaciones de Vértices

Consiste en la investigación de uno de los vértices del polígono determinado y el que optimiza la función objetivo es la solución (maximiza o minimiza).

4.1.2. Pendiente de la Recta

Se busca un infinito número de curvas, todas paralelas y con pendientes, - que se determina previamente y luego se grafican las curvas, alejándolas del origen hasta el momento en que se tenga un punto en común con el polígono, obteniéndose la optimización de la función objetivo.(maximización o minimización) según el caso.

4.1.3. Desarrollo del Caso N° 1 (Granja La Pradera)
(Maximización - Método Gráfico)

El Ingeniero Silva, dueño de la empresa agropecuaria "La Pradera" quiere producir dos cultivos hortícolas como cebolla y ajo y desea definir la cantidad de hectáreas de cada uno para la próxima temporada con el objetivo de - maximizar sus ganancias:

Y sabe que para producir los dos cultivos necesita: costo en capital circulante ∴

Para una Ha. de cebolla	10.880.600 pesos
Para una Ha. de ajo	51.818.600 "

(Datos tomados del cuadro anexo de necesidades varias por cultivo N° 1)

Tiene como capital circulante o de operación 2.000.000.000 pesos disponibles para invertir en la producción de los dos cultivos.

Tiempo que insumen los tractores de su propiedad es:

25.7 horas para una Ha. de cebolla

35.2 " " " " " ajo y

las horas tractor de la propiedad suman 3.500 al año.

<u>Mano de Obra</u>

226.5 horas Ha. para cebolla

759.8 " " " ajo

El total de mano de obra disponible al año suman 35.000 horas en las cuales están incluídos mano de obra eventual, fija (tractorista y gerente).

Se desea determinar la cantidad de hectáreas de cebolla y ajo que debe producir para obtener el máximo de beneficio. Este último está determinado por el margen bruto o de contribución. que resulta de la venta de los dos productos, descontados los costos variables: cebolla 53.826.585 pesos/ha y Ajo 157.668.582 pesos/ha.

En el siguiente cuadro se muestra lo enunciado anteriormente:

PRODUCTO	MARGEN BRUTO Pesos/Ha.	RESTRICCIONES		
		CAPITAL CIRCULANTE COSTO Pesos/Ha.	TRACTOR Horas/Ha.	MANO DE OBRA
Cebolla	53.826.585	10.880.600	25.7	226.5
Ajo	157.668.582	51.818.600	35.2	759.8
TOTAL DISPONIBLE		2.000.000.000 pesos	3.500 hr/año	35.000 hr/año

4.1.4. <u>Planteo del problema</u>

La cebolla y el ajo son las variables de la producción expresados en hectáreas.

El objetivo es obtener la máxima ganancia representada por la contribución del margen bruto.

Por tanto el beneficio máximo está representado por la suma de las contribuciones marginales de cada hectárea de cultivo, multiplicado por la cantidad óptima que se produzca de cada uno de ellos.

Maximizar CMBT - 53.826.585 A + 157.668.582 B

Objetivo

Estas cantidades tales que hagan máxima la contribución marginal total es lo que averiguaremos.

CMBT = Contribución Marginal Bruta Total

Los costos necesarios para producir cebolla (A) y ajo (B) relacionados con el total necesario de cada uno, pueden expresarse de esta forma:

Costo en Capital circulante/Ha.

10.880.600 A + 51.818.600 B $\leq$ 2.000.000.000 pesos | **Restricción N° 1**

Esto significa que 10.880.600 pesos necesitamos en capital circulante multiplicado por cada hectárea de cebolla (A) a producir y más 51.818.600 pesos en capital circulante multiplicado por cada hectárea de ajo (B) deben ser menor o igual a 2.000.000.000 pesos disponibles para cubrir los costos de los dos cultivos.

Tractor

25.7 A + 35.2 B $\leq$ 3.500 horas/tractor | **Restricción N° 2**

25.7 horas tractor del producto A multiplicadas por cada hectárea que vamos a producir de cebolla y 35.2 horas tractor del producto B multiplicadas por cada hectárea que vamos a producir de ajo, deben ser menor o igual a -- 3.500 horas de tractor al año disponibles.

Mano de Obra

226.5 A + 759.8 B $\leq$ 35.000 horas | Restricción N° 3

226.5 **horas de mano de obra eventual, fija y gerencia necesaria por hectárea multiplicada por la cantidad de hectáreas de cebolla a producir 759.8 horas mano de obra por cada hectárea de producción de ajo, multiplicada por la cantidad de hectáreas que vamos a producir deben ser menor o igual a --- 35.000 horas disponibles.**

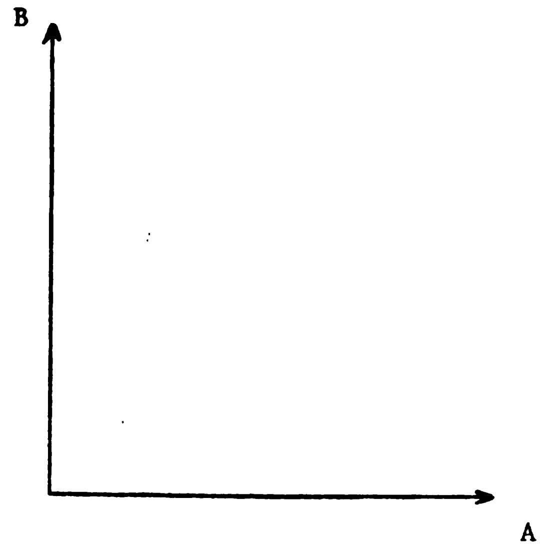
Este ejemplo propuesto lo resolvemos con el método gráfico.

4.1.5. Aplicación del Método Gráfico

Este método puede ser aplicado cuando se trabaja con no más de dos productos (variables) en este caso cebolla A y ajo B.

De esta manera representamos en un plano, en el eje de las ordenadas ubicamos las cantidades a producir de A y en el eje de las absisas las cantidades a producir de B.

GRAFICO N° 2



Ahora graficamos las restricciones que tenemos, es decir, nuestros recursos limitados de producción.

Costo en Capital circulante — Restricción N° 1

$10.880.600\ A + 51.818.600\ B \leq 2.000.000.000$

Para representar una recta basta con hallar dos puntos. Es más sencillo - buscar los puntos en que la recta corta a los dos ejes representados (estos puntos se llaman ojos de la recta).

Entonces:

Cuando $A = 0$ $B = 38.6$

Cuando $B = 0$ $A = 183.81$

Esto significa que cuando no producimos cebolla podemos producir como - máximo 38.6 hectáreas de ajo de acuerdo con muestra disponibilidad de capital.

¿Por qué decimos como máximo?

Si reemplazamos en la recta $10.880.600\ A + 51.818.600\ B \leq 2.000.000.000$

$A = 0$ $B = 38.6$ ha.

$\underline{51.818.600 \quad (38.6) \quad = \quad 2.000.000.000}$

↓ **Máxima disponibilidad de dinero para ajo**

Del mismo modo cuando no producimos ajo podemos producir cebolla

B = 0 A = 183.81 Ha.

$\underline{10.880.600 \ (183.81) = 2.000.000.000}$

↓ **Máxima disponibilidad de dinero para cebolla**

Marcamos estos dos puntos en los ejes correspondientes, los unimos y nos queda representada la restricción de hectáreas en valor capital circulante.

Horas Tractor $\boxed{\text{Restricción N° 2}}$

Graficamos:

$25.7 \ A + 35.2 \ B \leq 3.500$ horas

Buscamos los puntos de corte con los ejes

Cuando A = 0 B = 99.43 horas tractor

Cuando B = 0 A = 136.19 " "

De acuerdo con esta restricción sino producimos A podemos producir como máximo 99.43 hectáreas de B (Ajo), sino producimos B podemos producir como máximo 136.19 hectáreas de (Cebolla).

Marcamos estos puntos en los ejes y los unimos para representar esta restricción.

Entonces en esta etapa de análisis los puntos factibles de producción son los que quedan "encerrados" por las dos rectas dibujadas (a la izquierda) incluyendo los puntos sobre las rectas que los determinan (puntos que marcamos con guiones).

Mano de Obra $\boxed{\text{Restricción N° 3}}$

Horas de mano de obra

$226.5 \ A + 759.8 \ B \leq 35.000$ horas

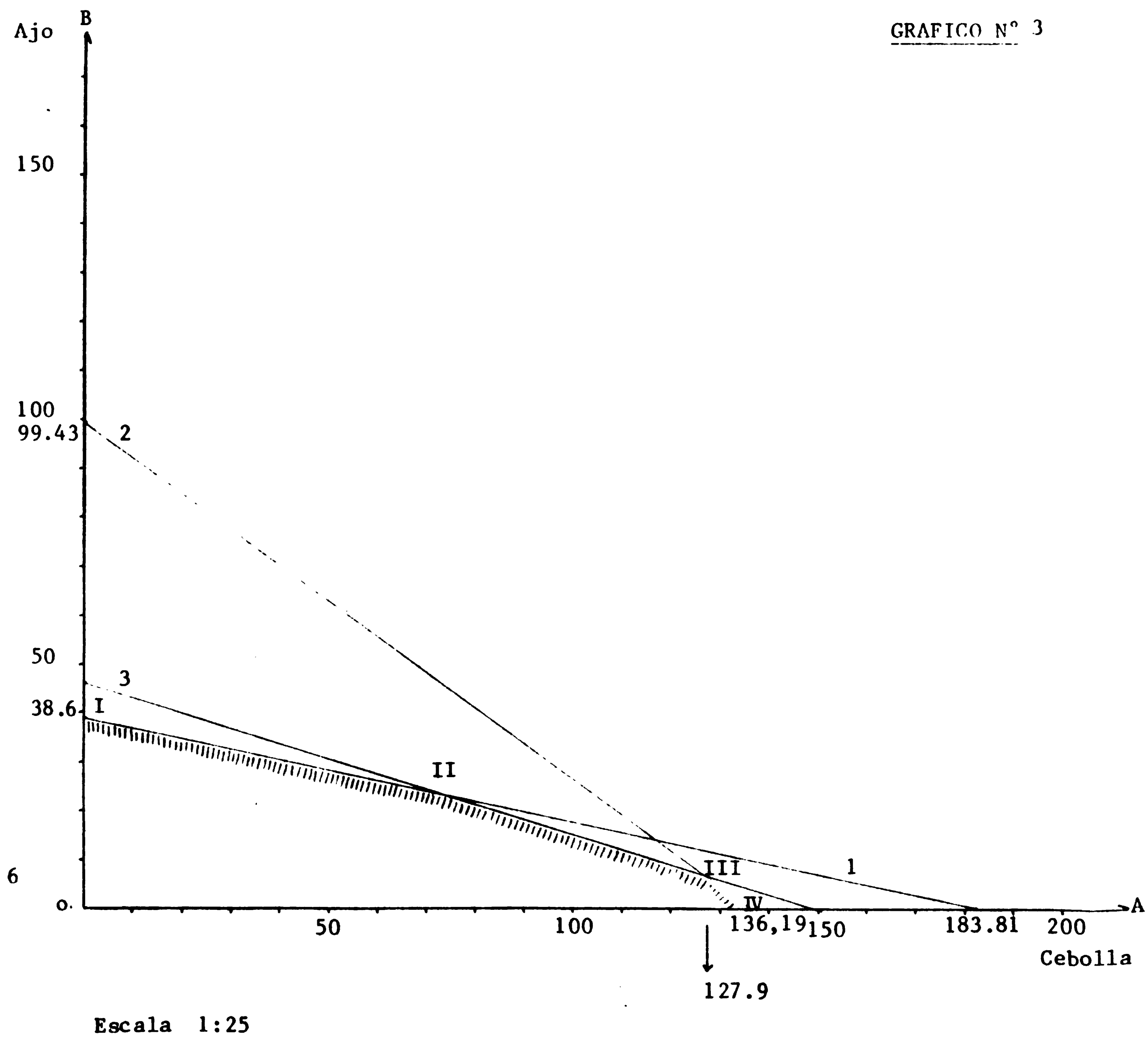
Cuando A = 0 B = 46.06

Cuando B = 0 A = 154.53

Marcamos los puntos en el gráfico.

GRAFICO DE SOLUCIONES FACTIBLES

GRAFICO N° 3



Escala 1:25

Finalmente, el área marcada con guiones son los puntos factibles de producción que cumplen con las tres restricciones y es lo que se llama"polígono de soluciones factibles". Por tanto todos los puntos del polígono constituyen soluciones factibles.

4.1.5.1. Superficie Optima

Determinada el área de las posibles soluciones, nos queda averiguar la superficie óptima que nos ha de producir la máxima contribución total.

Maximizar C.M.T. = 53.826.585 A + 157.668.582 B

Es evidente que cuando más producimos, mayor será la contribución, de modo tal que la solución se encontrará al máximo posible a la derecha del gráfico ya que nuestro objetivo es maximizar.
Pero al desplazarnos a la derecha nos encontramos con límites vallas que - son las rectas que representan nuestros recursos limitados. Más allá de cada una de ellas están las soluciones no factibles.

4.1.6. Investigación de Vértices

Los vértices de nuestro polígono son: I-II-III-IV, que están marcados en - el gráfico.
Reemplazamos en nuestro objetivo para averiguar cual es la contribución - marginal bruta.

VERTICES	A CEBOLLA - Has.	B AJO - Has.	CONTRIBUCION MARGINAL BRUTA 53.826.585 A+157.668.582 B
I	0	38.6	6.086.007.265
II	70	23.89	7.536.140.060
III	127.9	6	7.830.431.714
IV	136.19	0	7.330.642.611

El que nos da mayor contribución marginal bruta es el vértice III con una superficie de 127.9 hectáreas de cebolla y 6 hectáreas de ajo.
Esta es la solución del caso planteado.

El vértice III con una superficie de 127.9 hectáreas de cebolla y 6 hectáreas de ajo

Restricción N° 1

$$10.880.600\ (127.9) + 51.818.600\ (6) \leq 2.000.000.000$$

Capacidad utilizada	1.702.540.340	
Capacidad ociosa	297.459.660	pesos

Restricción N° 2

$$25.7\ (127.9) + 35.2\ (6) \leq 3.500$$

Capacidad utilizada	3.498.23	
Capacidad ociosa	1.77	horas tractor

Restricción N° 3

$$226.5\ (127.9) + 759.8\ (6) \leq 35.000$$

Capacidad utilizada	33.528.15	
Capacidad ociosa	1.471.85	mano de obra

4.1.7. Caso N° 2 (Maximización) - (San Ignacio)

En un establecimiento del área de CORFO denominado "San Ignacio", propiedad del Señor Prignot, que dispone de los siguientes recursos, el dueño quiere hacer uso de la programación lineal a efecto de obtener la fórmula óptima a la que debe gerenciar su explotación:

Tierra	1.000	Has.
Ganado	900	Cabezas
Capital circulante	40.000	(En miles de pesos)
Disponibilidad de tractor	2.000	Horas/año
Capacidad de almacenamiento	12.000	qq

Las actividades realizables son ganadería y agricultura.

P_1 Ganadería

P_2 Agricultura

Cuadro resumen

RECURSO	GANADERIA P_1		AGRICULTURA P_2	RESTRICCIONES
	Unidad	Ha.	Ha.	
Tierra	Ha.	1	1	1.000
Ganado	Cab.	1.2	-	900
Cap.circulante	Pesos	60	100	40.000 (miles de pesos)
Disponibilidad tractor	Horas	1	2	2.000
Capacidad de almacenamiento	qq	-	20	12.000
Función objetivo Z = Margen Bruto	$	100	300	

Se distinguen dos etapas:

a. Determinación del campo de factibilidad y

b. Obtención del valor extremo de la función objetivo

Determinación del campo de factibilidad (o soluciones posibles)

Se debe expresar que la cantidad de recursos utilizados por las activida des debe ser inferior o igual a la disponibilidad inicial de los mismos - (inecuaciones de los insumos).

Tierra	$1X_1 + 1X_2 \leq 1.000$	Has.
Ganado	$1{,}2X_1 \leq 900$	Cabezas
Capital circulante	$60X_1 + 100X_2 \leq 40.000$	(Miles de pesos)
Disponibilidad de tractor	$1X_1 + 2X_2 \leq 2.000$	Horas
Capacidad de almacenamiento	$40X_2 \leq 12.000$	qq

La ecuación de la recta correspondiente al uso de la tierra indica que la superficie utilizada por la actividad 1 más la superficie utilizada por la - actividad 2 no deben superar las 1.000 Has. (recurso disponible). La situa-- ción extrema ocurre en la igualdad, es decir cuando:

$$A + B = 1.000$$ Restricción N° 1

Determinamos los 2 puntos de la recta

Cuando $A = 0$ $B = 1.000$

Cuando $A = 1.000$ $B = 0$

Esta recta corresponde al pleno empleo del factor tierra (en cualquier - punto de la misma, dentro del primer cuadrante, el insumo de la tierra por parte de las actividades es igual a las disponibilidades). La recta delimita 2 semiplanos de los cuales el que contiene el origen comprende a todas las soluciones posibles (campo de factibilidad) en función del insumo tierra - (triángulo OAB.)

En el caso del ganado, la ecuación de la recta corresponde al pleno empleo del factor:

$$1.2\ B = 900$$ Restricción N° 2

Por tanto $A = \dfrac{900}{1.2} = 750$ para cualquier valor de X_2

De este modo se dividen dos semiplanos mediante la recta CC'. El semiplano que contiene el origen corresponde al campo de factibilidad en función de la ganadería.

En el caso del capital circulante, la ecuación de la recta corresponde al pleno empleo del factor es:

Restricción N° 3

$$60\ A + 100\ B = 40.000$$

$$A = 0 \quad \text{será} \quad B = \frac{40.000}{100} = 400$$

$$B = 0 \quad \text{será} \quad A = \frac{40.000}{60} = 666.67$$

De este modo se limita el triángulo OED que incluye las soluciones posibles en función del capital circulante.

En el caso del tractor, la ecuación de la recta correspondiente al pleno empleo del factor es:

Restricción N° 4

$$A + 2\ B = 2.000$$

$$A = 0 \quad \text{será} \quad B = \frac{2.000}{2} = 1.000$$

$$B = 0 \quad \text{será} \quad A = 2.000$$

El triángulo OAF incluye el campo de soluciones posibles en función del uso del tractor.

En el caso de la capacidad del silo la ecuación de la recta correspondiente al pleno empleo del factor es:

Restricción N° 5

$$20\ B = 12.000$$

$$B = \frac{12.000}{20} = 600$$

Las soluciones posibles en función de la capacidad del silo estarán determinadas por la recta OPQRSC. Puede apreciarse que el uso del tractor es un insumo no limitante (es externo al polígono).

Las curvas se encontrarán en el Gráfico N° 3.

4.1.7.1. Obtención del valor extremo de la función objetivo

Objetivo en este caso es maximizar la función económica Z (Margen bruto total), es decir encontrar el punto del polígono que corresponde al mayor valor de la función Z

$$Z = 100\ X_1 + 300\ X_2 \quad \text{(forma implícita)}$$

Despejamos X_2

$$X_2 = \frac{Z}{300} - \frac{100\ X_1}{300} \qquad X_2 = \frac{Z}{300} - 0.33$$

$$X_2 = \frac{Z}{300} - 0.33$$

Este miembro Z/300 puede tomar tantos valores como Z posibles, es decir infinitos. Para estos infinitos valores tenemos una familia infinita de curvas, todas ellas paralelas con pendientes.

$$-\frac{100X_1}{300} = 0.33 \quad \text{y} \quad {}^{Z}/300 \text{ es la ordenada al origen}$$

Dando un valor cualquiera a Z, por ejemplo:

Zo = 60.000 la ecuación será entonces:

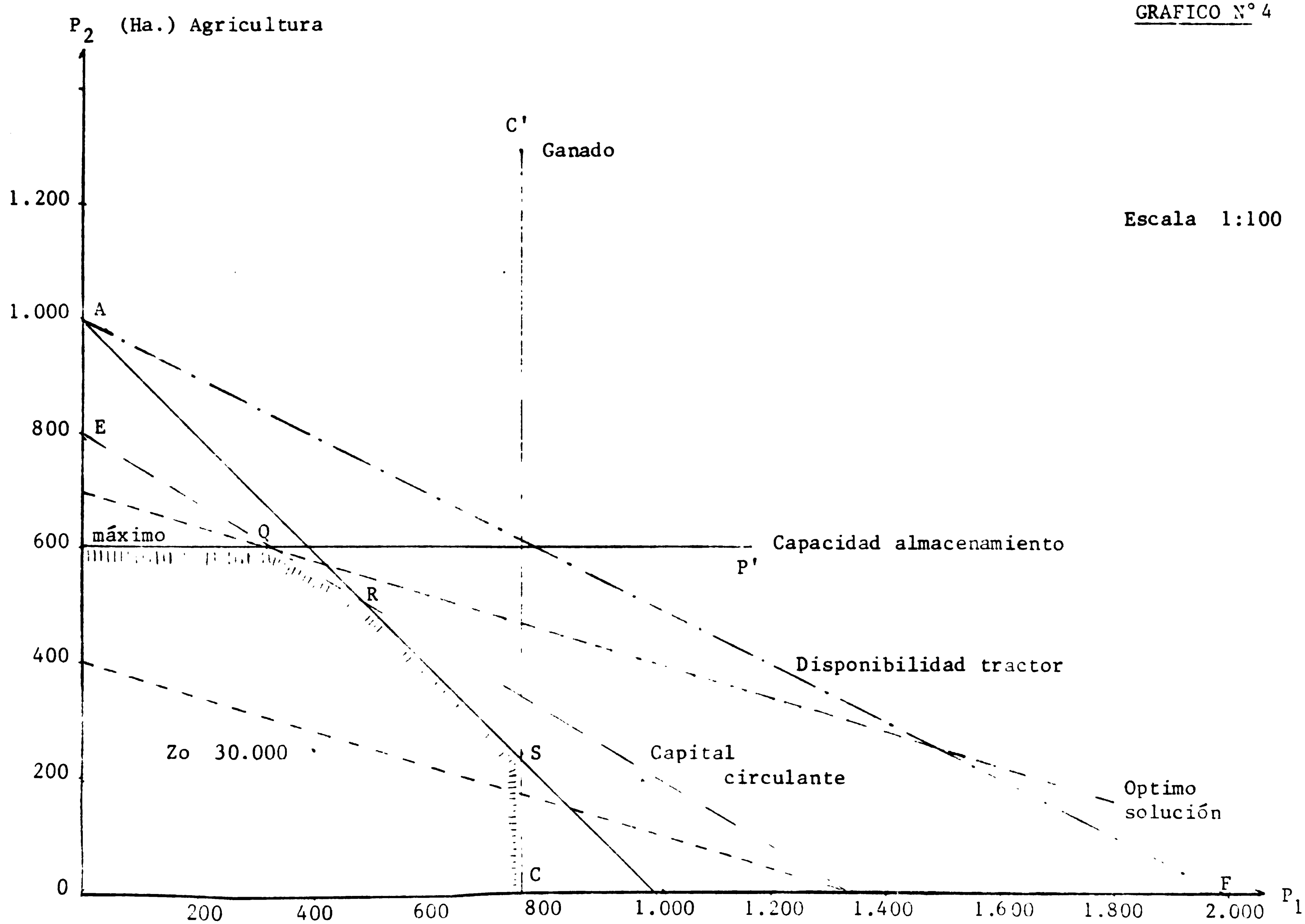
$$\frac{60.000}{300} = 200 \qquad Z_2 = 200 - 0.33X_1$$

En todos los puntos de dicha recta el margen bruto será igual a $ 30.000

$$X_1 = 0 \qquad X_2 = 200$$

$$\text{Cuando} \quad X_2 = 0 \qquad X_1 = 667$$

GRAFICO N°4



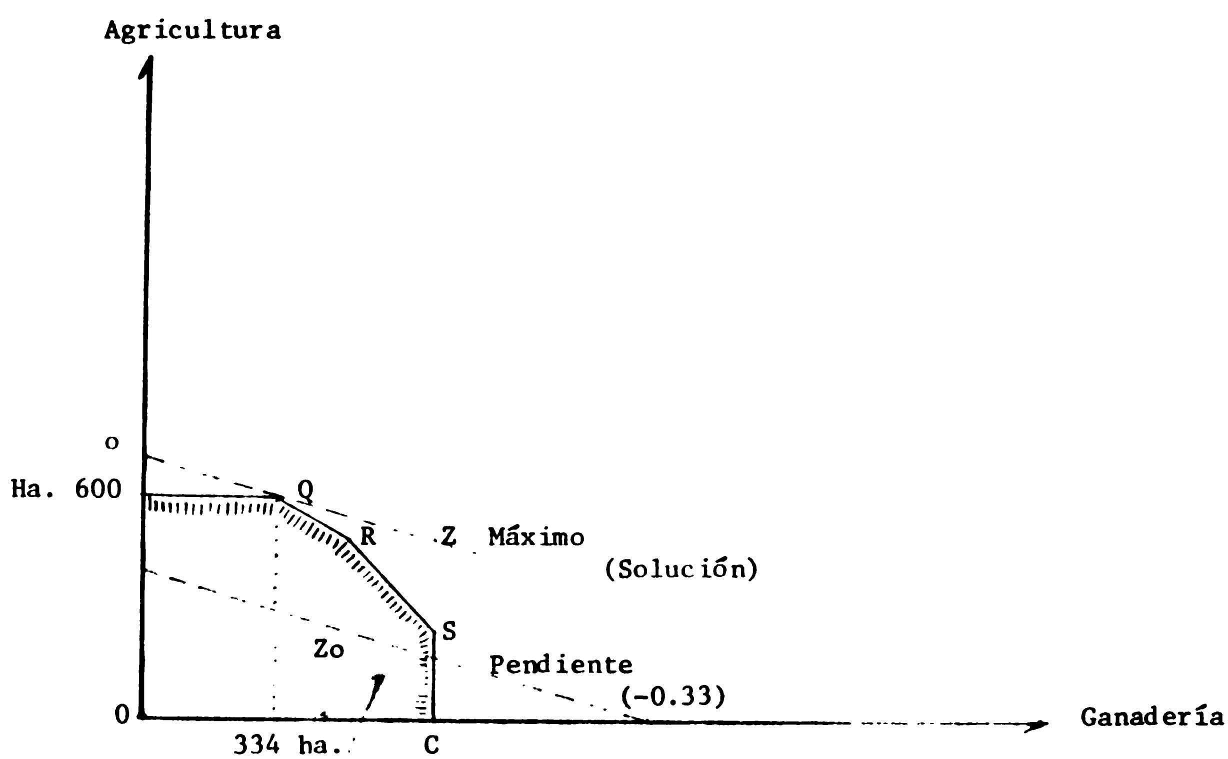
P2 (Ha.) Agricultura
Ganado
C'
Escala 1:100
1.200
1.000
800
600
400
200
0
A
E
máximo
Q
R
S
C
Capacidad almacenamiento
P'
Disponibilidad tractor
Capital
circulante
Zo 30.000
Optimo
solución
F
200
400
600
800
1.000
1.200
1.400
1.600
1.800
2.000
P1

Al variar el valor Z, la recta se desplazará en forma paralela (porque solo cambia la ordenada del origen). El objetivo es ir aumentando su valor - (alejándole del origen) hasta el momento en que la recta Z tenga un solo punto en común con el polígono (en este caso en Q). Todo valor de Z por encima de dicho punto corresponderá a una solución no admisible (se habrá violado - alguna restricción).

En el caso que se analiza el <u>punto Q</u> corresponde a la combinación de actividades que maximizan el margen bruto: es la solución óptima, es decir el plan óptimo estaría integrado por 334 Has. de X_1 (ganadería) y 600 Has. de X_2 (agricultura).

Puede apreciarse en la Gráfico N° 4 que el óptimo se situará en uno de - los vértices del polígono. A veces, puede suceder que la pendiente de la recta de la función objetivo coincida con la de una de las aristas del polígono (restricciones). En dicho caso todos los puntos de la arista corresponderán a programas óptimos equivalentes (caso de degeneración dual).

<u>GRAFICO N° 5</u>



Maximizar el margen bruto en la función objetivo

$$Zo = 100\ (334) + 300\ (600)$$

Margen bruto = 213.400 óptimo (ganadería y agricultura)

4.1.8. Caso N° 3 (Criadero de Aves)

Minimización de costos (Método Gráfico)

4.1.8.1. Desarrollo del caso

El Ing.Agr. Wagner Mantilla posee un criadero de aves y compra para alimentarlas, dos clases de balanceados que llamaremos A y B cuyos respectivos costos son 5.000 el kg. y 2.500 el kg. al estudiar la dieta requerida por las --- aves se determinó que como mínimo debía suministrárseles 8 kg. diarios de avena 19 kg. de afrecho y 7 kg. de maíz. El contenido de estos elementos en los - alimentos A y B es el siguiente:

ELEMENTOS	ALIMENTOS	
	A	B
Avena/kg.	0.1	0.3
Afrecho/kg.	0.3	0.4
Maíz/kg.	0.3	0.1

Se pretende determinar la dieta óptima que satisfaga los requerimientos estipulados al mínimo costo.

4.1.8.2. Planteo

A y B son las variables de los productos expresadas en kgs..
La función objetivo
Siendo Z el costo total por día la función objetivo es:

Minimizar $Z = 5.000\,A + 2.500\,B$

El objetivo es obtener el mínimo costo representado por los alimentos A y B

Restricciones: cantidad de avena por kg.

$$0.1\,A + 0.3\,B \geq 8$$ Restricción N° 1

Cantidad de afrecho

Restricción N° 2

$$0.3\,A + 0.4\,B \geq 19$$

Cantidad de maíz

Restricción N° 3

$$0.3\,A + 0.1\,B \geq 7$$

4.1.8.3. <u>Análisis Gráfico</u>

Restricción N° 1

$$0.1\,A + 0.3\,B \geq 8$$

Cuando	A = 0	B = 26.6
Cuando	B = 0	A = 80

Restricción N° 2

$$0.3\,A + 0.4\,B \geq 19$$

Cuando	A = 0	B = 47.5
Cuando	B = 0	A = 63.3

Restricción N° 3

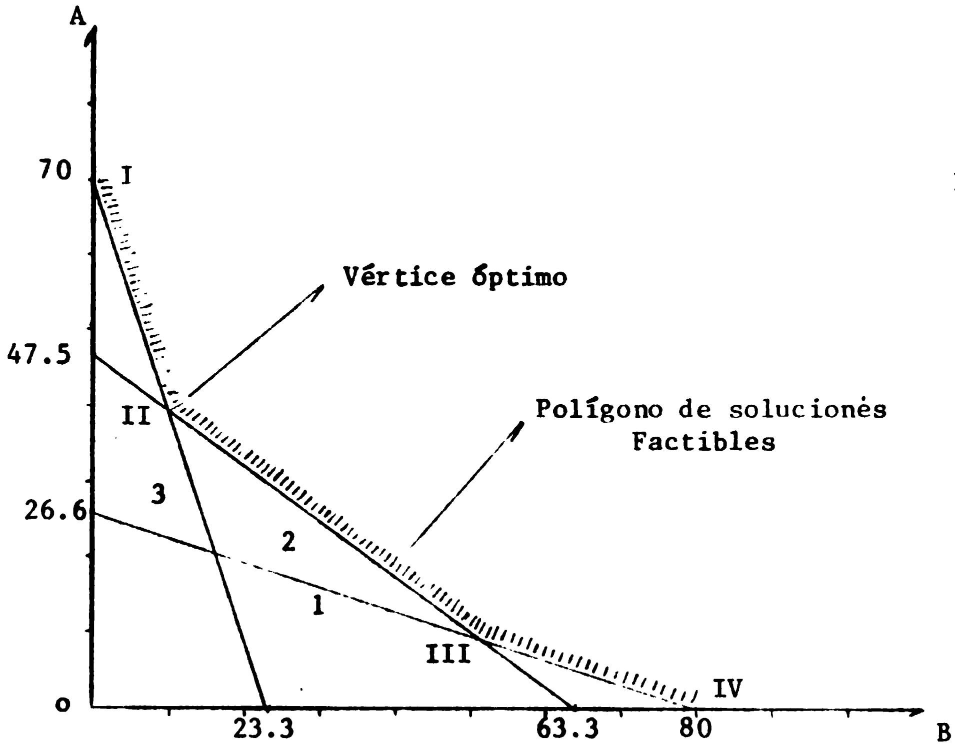
$$0.3\,A + 0.1\,B \geq 7$$

Cuando	A = 0	B = 70
Cuando	B = 0	A = 23.3

Las restricciones son mayor e igual a cero haciendo factible todos los puntos que quedan determinados a la derecha de las rectas.

GRAFICO N° 6

Escala 1:100



El área con guiones está constituída por los puntos factibles de compra de alimentos A y B diarios que satisfacen las 3 restricciones simultáneamente.

Hasta este punto no existe diferencia en la determinación del polígono de soluciones factibles entre los problemas de minimización y maximización, ya que su dibujo depende del tipo de restricciones planteadas exclusivamente.

El tratamiento diferencial se verá a continuación, donde vamos a averiguar cual es la cantidad de kilogramos óptima que debe comprarse de alimentos A y B.

4.1.8.4. Investigaciones de Vértices

$$Z = 5.000 + 2.500 \; B$$

Los vértices son:

VERTICE	KILOGRAMOS		COSTO
	A	B	
I	0	70	175.000
II	10	40	150.000
III	47	12	265.000
IV	80	0	400.000

El que nos produce un mínimo costo es el vértice II, dado que la función objetivo está producida en la minimización de costos.

Solución: Compra diaria

10 kg. de A x 5.000 pesos = 50.000

40 kg. de B x 2.500 pesos = 100.000

150.000 pesos

4.1.9. Desarrollo del Caso N° 4 (Ganadería) (Fuente: Vasquez Roberto - IICA)

Se desea producir una ración balanceada para sobre alimento de ganado con ciertos requerimientos mínimos de nutrientes, al menor costo posible. Se dispone de dos alimentos alternativos cuya composición en kg. de nutrientes por 100 kg. de alimento se detalla a continuación:

ALIMENTOS	NUTRIENTES 1	NUTRIENTES 2	NUTRIENTES 3
A	60	40	10
B	20	24	60

Los requerimientos mínimos para la ración son:

Nutriente	1	=	30 kg. por cada 100 kg. de ración
Nutriente	2	=	30 kg. " " " " "
Nutriente	3	=	15 kg. " " " " "

El costo del alimento A es de 10 dólares cada 100 kg. y el
" " " B es de 15 " " "

Se desea saber si cambiaría el precio de A a 50 dólares y el de B a 10 dólares. Y si el precio de A es de 10 y de B de 70 dólares.

Función objetivo:

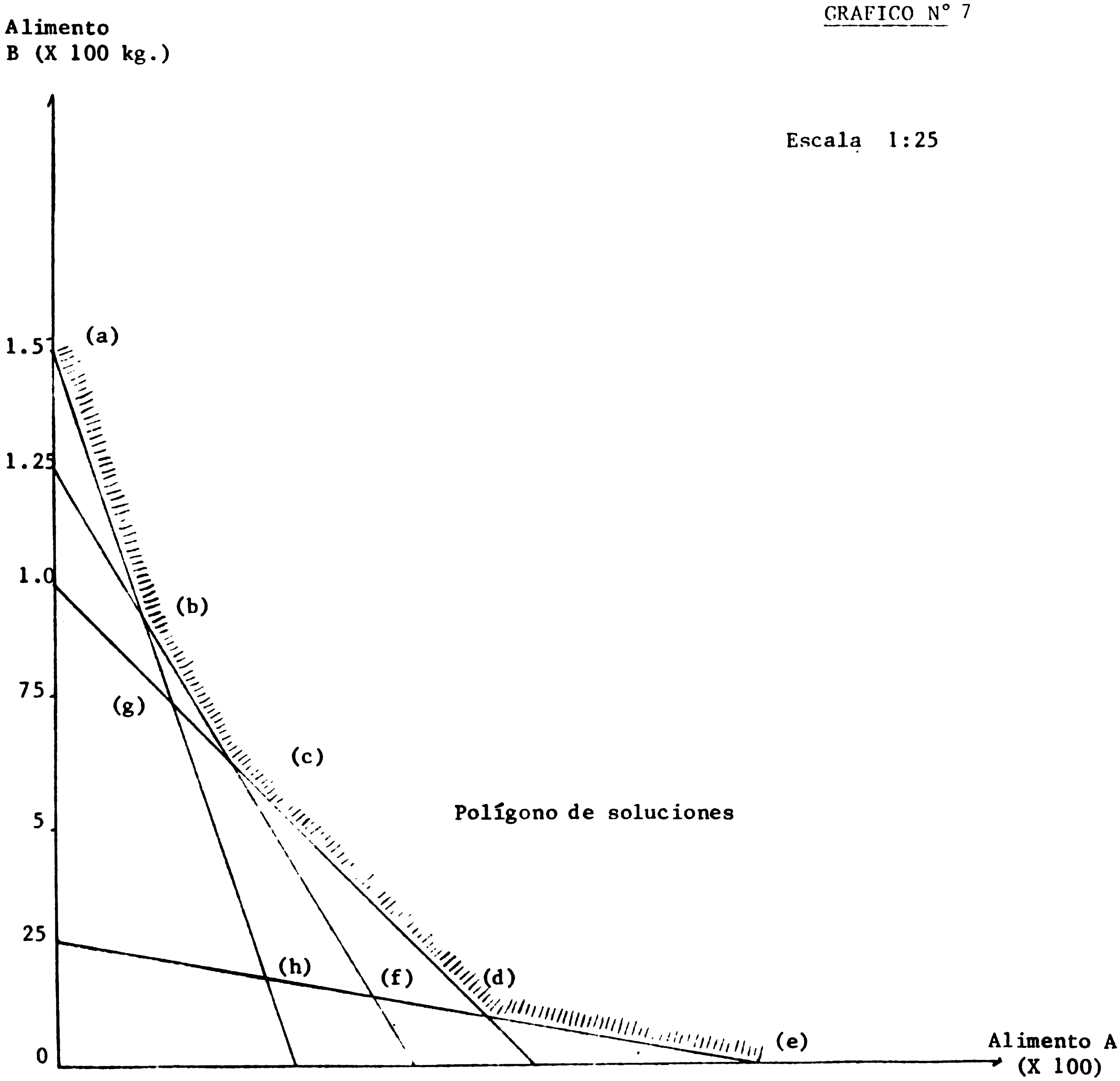
$$\text{Minimizar } C = 10\,A + 15\,B$$

Sujetos las siguientes restricciones:

Nutriente	1	=	$60\,A + 20\,B \geq 30$	$\Longrightarrow$	$B = 150 - 3\,A$
Nutriente	2	=	$40\,A + 24\,B \geq 30$	$\Longrightarrow$	$B = 125 - 1.67\,A$
Nutriente	3	=	$10\,A + 60\,B \geq 15$	$\Longrightarrow$	$B = 25 - 0.167\,A$

Volumen $100\,A + 100\,B \leq 100 \Longrightarrow B \quad 100 - A$

GRAFICO N° 7


Alimento
B (X 100 kg.)
Escala 1:25
1.57
1.25
1.0
75
5
25
0
(a)
(b)
(g)
(c)
Polígono de soluciones
(h)
(f)
(d)
(e)
Alimento A
(X 100)

Soluciones:

VERTICE	A	B	COSTOS			VOLUMEN	N1	N2	N3
			10/15	50/10	10/70				
a	0	150	2.250	-	-	150	30	36	90
b	19	94	1.400	-	-	113	30	30	20.8
c	37.5	62.5	1.312.5	2.500	4.750	100	35	30	41.25
d	90	10	1.050	4.600	1.600	100	56	38.4	15
e	150	0	1.500	-	-	125	90	60	15
f	67	14	880	3.490	1.650	81	43	30	15
g	25	75	1.375	-	-	100	30	28	47.5
h	44	18	710	-	-	62	30	21.92	15

5. Método Intuitivo o Económico

Este método utiliza el sentido común y la intuición sigue los siguientes pasos:

Analiza:

Capacidad ociosa
Solución cero
Producción máxima del producto de mayor rendimiento
Primer programa
Producción mixta
Costo de oportunidad
Conveniencia
Obtención del óptimo

Al igual que el método gráfico, el método intuitivo resuelve problemas de programación lineal cuando existen solo dos variables. En el desarrollo del caso N° 5 podremos detallar los pasos que sigue el método hasta obtener el óptimo.

5.1. <u>Caso N° 5</u> -(Planta de Semillas)
(Maximizar)

La Planta de Semillas PROSEMCOOP de Hilario Ascasubi, tiene que producir dos clases de semilla de alfalfa, A y B, y se desea obtener la mezcla de esta producción a ser comercializada en la próxima temporada de siembra.

Consumo de polvo de hierro:

3 kg. de polvo de hierro para una tonelada de alfalfa A
4 kg. de polvo de hierro para " " " " B

En bodega existe un stock de 1.000 kg. de polvo de hierro sobrante de la campaña anterior.
El tiempo de maquinado en la limpieza y clasificación de las alfalfas es como sigue:

5 horas de maquinado (Cliper, mesas vibradoras y Gomper) para A
2 " " " (" " " " ") " B

El total disponible en horas son 1.200 h/máquinas.
La mano de obra que insumen estas dos semillas son:

2 horas para alfalfa A
4 " " " B

Y el total disponible de mano de obra en un mes es de 1.000 horas.
Se desea determinar la cantidad de alfalfa A y Alfalfa B que se deben producir para obtener el máximo beneficio.

La contribución por tonelada es 1.200.000 para alfalfa A (pesos)
" " " " " 900.000 " " B "

ALFALFAS	CONTRIBUCION MARGINAL/Tn.	POLVO DE HIERRO	RESTRICCIONES	
			Máquinas	Mano de Obra
A	1.200.000	3 kg.	5	2
B	900.000	4 kg.	2	4
TOTAL DISPONIBLE		1.000 kg.	1.200 hs.	1.000 hs.

Nuestro objetivo es maximizar la:

Contribución Marginal Total = 1.200.000 A + 900.000 B

Sujeto a las siguientes restricciones:

$3A + 4B \leq 1.000$	Restricción N° 1
$5A + 2B \leq 1.200$	Restricción N° 2
$2A + 4B \leq 1.000$	Restricción N° 3

5.1.1. Resolución

5.1.1.1. Capacidad Ociosa

Primeramente introducimos el concepto de capacidad ociosa en cada una de nuestras restricciones:

Capacidad ociosa	(kg)	Polvo de hierro	C_1
" "	(horas)	Máquinas	C_2
" "	(horas)	Mano de obra	C_3

Sumamos cada uno de estos conceptos a cada una de las restricciones:

$3A + 4B + C_1 = 1.000$	Restricción N° 1
$5A + 2B + C_2 = 1.200$	Restricción N° 2
$2A + 4B + C_3 = 1.000$	Restricción N° 3

Esto significa en la restricción N° 1 que:

3 kg. de polvo de hierro necesitamos para cada tonelada de Alfalfa A, multiplicado por la cantidad de toneladas de alfalfa A a producir; 4 kg. de polvo de hierro para cada tonelada de producción de alfalfa B a producir más una cantidad C_1 de kg. de polvo de hierro sin utilizar debe dar una suma igual al total disponible de materia prima que es de 1.000 kg.

Este mismo razonamiento es aplicable a las restricciones 2 y 3

5.1.1.2. Solución de no producir nada (Trivial)

Comenzamos por una solución trivial, es decir considerar la situación extrema y mínima de no producir nada.

Producción A = B = 0

¿Qué pasa con los recursos limitados?

Nos sobran las cantidades íntegras de todos los recursos y la contribución a nuestro objetivo planteado es:

$$CMT = 1.200.000\ (0) + 900.000\ (0) = 0$$

Esto es el programa cero. Y es válido como primera aproximación, primera solución factible o ya dijimos una solución trivial.

5.1.1.3. Producción Máxima del producto de mayor rendimiento

Primer programa

Ahora nos parece lógico producir al máximo la alfalfa A que nos brinda un mayor rendimiento, que es $ 1.200.000 de contribución marginal.

En el caso de la restricción N° 1, por ejemplo, necesitamos 3 kg. de polvo de hierro para cada tonelada de limpieza de alfalfa A. Por tanto como tenemos 1.000 kg. de polvo de hierro solo podemos fabricar 1.000/3 = 333 toneladas.

De esta forma, en general:

Rest. N° 1	nos permite	1.000/3 = 333,33	T	alfalfa A
Rest. N° 2	"	"	1.200/5 = 240.0	T	alfalfa A
Rest. N° 3	"	"	1.000/2 = 500.0	T	alfalfa A

Qué cantidad podemos limpiar de semilla? Es evidente que 240 toneladas porque esta restricción es dominante. No podemos producir más de 240 toneladas porque no disponemos más de 1.200 horas de maquinado y con la producción de 240 toneladas utilizamos la capacidad total de las máquinas y aunque las restricciones 1 y 3 nos permitan una mayor cantidad de producción, debemos ajustarnos en este caso a la restricción N° 2.

Con producción de 240 toneladas de A y 0 toneladas de B la contribución marginal sería:

$$CMT = 1.200.000\ (240) + 900.000\ (0)$$

$$CMT = 228.900.000 \text{ pesos}$$

Restricción totalmente utilizada: Restricción N° 2 expresada en horas máquina.

$$C_2 = 0 = \left[1.200 - 240\ (5)\right]$$

Ahora restricciones que no utilizamos

N° 1 (Polvo de hierro): $C_1 = 1.000 - 240\ (3) = 280$ kg. polvo hierro

N° 3 (Mano de obra): $C_3 = 1.000 - 240\ (2) = 520$ horas

5.1.1.4. Producción mixta

Hacemos una producción mixta A y B en conjunto de modo de obtener mayor - ganancia. Por tanto tendremos que modificar el primer programa si la ventaja de dicha modificación es mayor que el costo resultante.

El cambio que podremos introducir es producir alguna tonelada de alfalfa B para utilizar la capacidad ociosa que tenemos expresada en kg. de polvo de hierro y horas mano de obra.

Si producimos una tonelada de alfalfa B nos obliga a reducir algunas toneladas de alfalfa A dado que la restricción N° 2 está totalmente agotada.

Ahora comparamos la contribución marginal de cada tonelada de alfalfa B con el costo que nos ocasiona sacrificar algunas toneladas de producción de alfalfa A (dejar de ganar con alfalfa A que se denomina costo de oportunidad) debido a la producción de alfalfa B.

Ingreso Adicional

Beneficio de una tonelada de alfalfa B   900.000 pesos

5.1.1.5. Costo de oportunidad

La producción de una tonelada de alfalfa B requiere 2 horas de máquina, restricción que está totalmente ocupada, entonces debemos dejar de producir 2/5 (0.4 toneladas de alfalfa A).

(Porqué una tonelada de alfalfa A demanda 5 horas de máquinas "Restricción N° 2).

Entonces dejaremos de ganar 0.4 x 1.200.000 pesos	480.000
Beneficio por cada tonelada de alfalfa B que producimos	420.000

Por tanto es conveniente producir alfalfa B ya que cada tonelada nos da un beneficio adicional de 420.000 pesos.

5.1.1.6. Análisis de Conveniencia

Al ser conveniente producir B, siempre será la cantidad máxima posible que va a estar dada por la capacidad disponible .
Por tanto analizamos que ocurre en cada restricción produciendo una tonelada de alfalfa B y con la consecuente reducción de 0.4 toneladas de A para llegar a la producción máxima posible.

	RECURSOS		
	RESTRICCIONES		
	1	2	3
a) 0.4 toneladas de A que se deja de producir liberan	1.2 kg.	2 hs.	0.8 hs.
b) 1 tonelada de B que se va a producir ocupa	4.0 kg.	2 hs.	4.0 hs.
c) Total ocupación incrementa por cada tonelada de B a producirse (b - a)	2.8 kg.	0 hs.	3.2 hs.
d) Total disponible luego del primer programa	280.0 kg.	0 hs.	520.0 hs.
e) Máxima producción posible de alfalfa B (d ÷ c)	100.0 kg.	indefinido	162.5 hs.

La última fila (e) nos indica la máxima producción posible de alfalfa B por el hecho de reducir la producción de alfalfa A en 0.4 Tn. por cada Tn. de B. Ese máximo se logra dividiendo el total disponible (d) por el uso adicional (c). La segunda columna da un resultado indefinido por la división de 0 ÷ 0 .
De las máximas producciones, la mínima es dominante por tanto produciremos 100 toneladas de B que nos darán 420.000 de beneficio marginal adicional por cada tonelada.
Por cada tonelada de B que producimos, dejamos de producir 0.4 de A por - tanto la producción de A bajará en:

$$0.4 \times 100 = 40 \text{ toneladas}$$

En el primer programa producíamos 240 toneladas de A.

Entonces: 240 - 40 = 200 toneladas de alfalfa A

El beneficio neto adicional sería:

420.000 por cada tonelada de B la contribución marginal se incrementará en 100 x 420.000 = 42.000.000 pesos.

Producción mixta

Obtenido así el segundo programa, la producción de 200 toneladas de alfalfa A y 100 toneladas de alfalfa B, la contribución marginal total será:

$$CMT = 1.200.000\ (200) + 900.000\ (100)$$

$$CMT = 330.000.000 \text{ pesos}$$

Esto coincide con lo anotado en la última parte del punto anterior, donde decíamos que la CMT se incrementaría en 42.000.000 pesos, que sumados al beneficio total del primer programa que era 288.000.000 pesos, es igual a - 330.000.000 pesos.

Capacidad total utilizada

C_1 = 0 (polvo de hierro) $\left[100 - 200\ (3) + 100\ (4)\right] = 0$

C_2 = 0 (maquinarias) $\left[1200 - 200\ (5) + 100\ (2)\right] = 0$

Capacidad sin utilizar

C_3 = 200 hs. de mano de obra $\left[1000 \quad 200\ (2) + 100\ (4)\right] = 200$

Al existir 200 hs. de mano de obra de capacidad ociosa volvemos a preguntarnos si el programa hallado es la mezcla óptima de producción que nos reporta la mayor C. Marginal.

Restricción N° 3 C_3: 200 hs. de mano de obra sin utilizar probamos si es conveniente modificar el programa anterior.

Si se incrementa el beneficio al introducir cualquier modificación, será conveniente hallar un nuevo programa; en este caso un tercer programa, si no lo incrementa, el programa ya hallado es el óptimo, en este caso el segundo programa.

Modificaciones:

Producir 1 tonelada más de A en detrimento de B
" 1 " " " B " " " A

Al introducir una tonelada más de A necesitamos:

Rest. N° 1 (kg. de polvo de hierro)

3 kgs. de polvo de hierro (para la A) y 4 kg. para B

Por tanto dejamos de producir: 3/4 (0.75) de B para producir una tonelada de A.

Rest. N° 2 (horas maquinado)

Para una tonelada de A necesitamos 5 horas de maquinado y para producir B necesitamos 2 hs.

Debemos dejar de producir 5/2 (2.5) de B para producir 1 tonelada de A.

Rest. N° 3 Por tener 200 horas disponibles no hacemos el análisis anterior.

Al comparar las restricciones 1 y 2, la dos es dominante (horas maquinado). En efecto, al dejar de producir 0.75 Tn. de B nos permite producir 1 tonelada de A de acuerdo con la restricción 1 pero no con respecto a la restricción 2.

Para producir 1 tonelada de A es forzoso que dejemos de producir 2.5 tn. de B ¿Es ésto económico?

Analizamos:

Ingreso adicional

Beneficio 1 tonelada de A	1.200.000

Costo de oportunidad adicional

Dejar de producir 5/2 (2.5) de B que nos da un beneficio marginal de 900.000 pesos representa esto una pérdida de	2.250.000
Resultado adicional (Pérdida) por cada tonelada de A que producimos	1.050.000

Por consiguiente no es conveniente producir más A

Al introducir 1 tonelada de B necesitamos:

Rest. N° 1:

4 kgs. de polvo de hierro (y 3 kgs. para A) entonces dejamos de producir 4/3 (1.33) toneladas de A.

Rest. N° 2: (horas maquinado)

2 horas maquinado (y para 1 tonelada de A 5 horas) debemos dejar de producir 2/5 (0.4) toneladas de A.

Rest. N° 2:

No lo analizamos por no estar agotada.

Ingreso adicional

Beneficio 1 tonelada de B	900.000
Costo oportunidad adicional	
Dejar de producir 4/3 (1.33) toneladas de A con un beneficio marginal de 1.200.000 representa una pérdida de	1.600.000
Pérdida por cada tonelada de B que introducimos	700.000

Por tanto no debe introducirse ningún cambio, ya que cualquier variación provoca una pérdida, por tanto el programa hallado es óptimo.
La solución del segundo programa es la óptima.
Se debe producir 200 toneladas de alfalfa A y 100 toneladas de alfalfa B.

De esta manera, por un análisis económico de tipo marginal que puede desarrolarse por simple reflexión, hemos llegado al programa óptimo que maximiza la contribución marginal.

6. Método Simplex *

6.1. Definición

Se lo utiliza cuando se trabaja con más de dos variables o con más de dos restricciones (casos en los cuales no puede usarse el método Gráfico ni el método Intuitivo).

* **FUENTE:** P.BONATTI

Es un algoritmo, una sucesión de instrucciones para resolver un problema de programación lineal. Se trata de un método interactivo que a través de un número finito de pasos logra la solución, no siempre de la manera más rápida pero si de la forma más segura.

6.2. Solución

Es un conjunto de valores que corresponden al conjunto de todas las variables del problema en cuestión, en un momento dado. Una solución constituye un programa en la terminología del método intuitivo que tratamos anteriormente.

Una solución es factible si todos los valores de las variables son no negativos ($X_j \not\leq 0$). Por consiguiente además de satisfacer las ecuaciones del sistema, satisface la restricción de no negatividad.

Una solución factible, es a su vez, básica si es una solución factible en la cual el número de variables de la misma es igual al número de restricciones, ejemplo: si en un problema existen 3 variables y 5 restricciones, una solución factible básica contiene tres valores de X_j mayores que 0.

Una solución factible, básica es óptima, cuando es la solución factible básica que optimiza la función objetivo (máximo o mínimo).

El problema de programación lineal puede ser resumido formalmente así:

Encontrar un conjunto de valores (solución) (X_1, X_2 .... X_j) no negativos para las variables que optimicen (maximicen o minimicen) la función objetivo lineal.

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_j X_j$$

Siendo C_j la contribución de cada variable en la función objetivo sujeta a las restricciones:

$$\sum_j a_{ij} X_j < = > b_i \qquad \text{donde } i = 1,2 \ldots\ldots m$$
$$j = 1,2 \ldots\ldots n$$

Siendo:

a_{ij} = Insumos de recurso por unidad de producto

b_i = Disponibilidad total del recurso

Dado que una solución factible requiere los valores de las variables no negativas, siempre tenemos una restricción adicional de no negatividad.

$$X_j \leqq 0$$

La estrategia que sigue el método Simplex, para encontrar ese conjunto de valores que definimos en el punto anterior, es trabajar a través de los cuadros partiendo de una solución rudimentaria y luego ir mejorándola, tratando de seguir el camino que en cada paso aporte un mayor valor a la función objetivo. Esto no es más que la aplicación del sistema de solución de ecuaciones simultáneas de "Gauss-Jordan", mejor conocido como el método de sustitución.

Para la resolución por este método se utiliza la representación por cuadros (matricial) de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas. Este sistema de ecuaciones se dispone en una forma determinada en dichos cuadros para permitir tipificar la búsqueda racional de niveles óptimos.

Las rutinas repetitivas del método permiten manejar fácilmente una mayor cantidad de variables, especialmente porque son fácilmente volcables a un programa de computadora.

6.3. El método

6.3.1. Primer Paso

Suponemos el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 3\,A + 4\,B \leq 1.000 \\ 5\,A + 2\,B \leq 1.200 \\ 2\,A + 4\,B \leq 1.000 \end{array}\right| \quad \text{m inecuaciones}$$

A y B son variables de productos

Función objetivo maximizar $Z = 1.200.000\,A + 900.000\,B$

El primer paso es convertir un sistema de m inecuaciones lineales a m ecuaciones lineales. Para esto introducimos las "variables de holgura" o shack y que representan las restricciones no utilizadas. C_1, C_2, y C_3 son variables de holgura:

$$\left.\begin{array}{l} 3\,A + 4\,B + C_1 = 1.000 \\ 5\,A + 2\,B + C_2 = 1.200 \\ 2\,A + 4\,B + C_3 = 1.000 \end{array}\right| \quad \text{m ecuaciones}$$

6.3.2. Desarrollo

En este ejemplo tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 5 variables. Esto no tiene solución determinada. Por tanto hay que encontrar una solución en la cual 3 variables tengan valores positivos.

Una forma de evitar el molesto problema de tener más variables que ecuaciones es asignar arbitrariamente valores a las variables que nos sobran, es decir dos. Y una buena idea es asignarles valor cero (0), lo que indudablemente además de facilitar los cálculos, tienen aquí un significado económico.

En efecto, nos conviene que las variables que representen la capacidad ociosa (en este ejemplo), tengan valor 0, ya que ello implica que todos nuestros procesos están trabajando a toda capacidad y que no hay restricción alguna sin utilizar .

Nuestro objetivo es maximizar Z y debemos llegar a una solución en la -- cual estemos seguros que hemos arribado al óptimo, que no hay otra solución (es decir otro programa, otro conjunto de valores de incógnitas), que impli- can un mayor nivel de contribución marginal.

Para mantener siempre una solución de 3 valores, en cada paso introduciremos una variable que no estaba en la solución (por lo tanto tenía valor cero) y sacaremos otra variable (dándole valor cero). Luego de efectuar estas sustituciones, calcularemos los nuevos coeficientes de todas las variables.

De aquí que el método Simplex sigue dos sistemas paralelos

6.3.2.1. Sistema de búsqueda o sistema de conducción

Orienta la búsqueda hacia las etapas a seguir. Esto significa entonces, que este sistema nos va a revelar cual es la variable que debemos introducir a la solución, la variable relevante a la cual le daremos valor y cual es la variable que debemos hacer salir de la solución, asignándole valor cero.

6.3.2.2. Sistema de cómputo o sistema de elaboración de los programas

Efectúa el cálculo de las soluciones intermedias. Una vez definida la variable a entrar y la variable a salir de la solución, por medio de este sistema, calcularemos nuevamente los valores de nuestras - variables. Estos dos sistemas se repiten hasta que el sistema de búsqueda detecta, nos avisa, que esa es la solución óptima; y esto sucede cuando la función objetivo no puede ser aumentada por la introducción de variable alguna.

6.3.3. Segundo Paso

Siguiendo con el ejemplo podemos formalizar nuestro sistema de ecuaciones:

$$3A + 4B + C_1 + 0C_2 + 0C_3 = 1.000$$

$$5A + 2B + 0C_1 + C_2 + 0C_3 = 1.200$$

$$2A + 4B + 0C_1 + 0C_2 + C_3 = 1.000$$

Maximizar $Z = 1.200.000\,A + 900.000\,B + 0C_1 + 0C_2 + 0C_3$

Siendo $X_j \geq 0$

6.3.4. Programa cero

Hemos incluído en todas las ecuaciones, todas las variables del sistema. Ahora se comienza por la solución más fácil, trivial. Como necesitamos dar valor cero (0) a 2 de las 5 incógnitas, para reducirlas al mismo número de ecuaciones, daremos valor cero a las incógnitas que representan la producción.

$$A = B = 0$$

Así podremos resolver el sistema de ecuaciones y tendremos como solución factible básica:

$$C_1 = 1.000$$

$$C_2 = 1.200$$

$$C_3 = 1.000$$

$$\text{Max } Z = 0$$

La solución es entonces factible básica con 3 valores positivos. Aquí 3 variables tienen valores positivos y 2 variables han sido anuladas. Esto es lo que llamamos <u>programa cero</u>.

6.3.5. Pasos sucesivos

Una vez obtenido el programa cero, por el sistema de búsqueda, se detecta cuál es la variable que ha de entrar en la solución (es decir pasar de valor nulo a valor positivo) para luego anular alguna de las que tienen valor en el programa cero (es decir pasar de valor positivo a valor nulo).

Luego se hallan los nuevos valores de las variables mediante la aplicación del sistema de cómputo. De esta manera se obtienen los distintos programas hasta que se llega al programa óptimo.

Cuando ninguna variable se puede introducir en la solución (es decir, darle valor positivo) aporta algún incremento en la contribución, el programa es entonces definitivo.

6.3.6. Consideraciones

La solución o programa óptimo contiene tantas n variables (n = número de actividades con prescindencia de las variables de holgura)como restricciones (m) tiene el problema (no incluyéndose como restricción la condición de no negatividad.)

Ello implica que:

a. Cuando el número de las variables del problema es menor al número de las restricciones, existirán algunas restricciones no utilizadas totalmente.

b. Cuando el número de variables del problema es mayor al número de restricciones, todas las restricciones se agotarán y algunos productos no integrarán el programa óptimo.

c. Cuando el número de las variables del problema es igual al número de las restricciones no existe regla, ya que según el valor de las variables en la función objetivo, pueden darse dos casos:

- Que todas las restricciones se agoten y todos los productos integren el programa óptimo.
- Que existan restricciones no utilizadas totalmente y algunos productos no integren el programa óptimo.

6.4. Caso N° 6 "FOCO S.A." (Maximizar - Método Simplex)

FOCO S.A. realiza la clasificación agroindustrial de dos productos que pueden ser para este ejemplo: pimiento y papa, que los denominaremos A y B respectivamente.

El Gerente, Sr. XX , desea saber que cantidad debería ordenar se procese de pimiento y papa para vender en la próxima temporada y se obtenga una mejor ganancia. Sabe que para realizar dicho trabajo necesita lo siguiente:

Insumos a utilizar

9 kg. para cada tonelada de pimiento
12 " " " " " papa

Stock en bodega según el último informe de estos materiales: 3.000 kg.

Tiempo de ocupación de las máquinas (clasificadoras, etc.)

15 horas para una tonelada de pimiento
6 " " " " " papa

La disponibilidad de dichas máquinas es de 3.600 horas para la temporada

Mano de Obra

6 horas para pimiento
12 " " papa

Los obreros que trabajan en FOCO S.A. pueden aportar 3.000 horas.

Ejemplo propuesto:

		RESTRICCIONES		
PRODUCCION	M.B.C.	Insumos kgs.	Máquinas	Mano de obra
Pimiento (A)	3.600	9	15	6
Papa (B)	2.700	12	6	12
Total disponible		3.000 kg.	3.600 minutos	3.000 hs.

Función objetivo: maximizar CMT = 3.600 A + 2.700 B
Sujeto a las siguientes restricciones:

$9A + 12B \leq 3.000$	Restricción	N° 1	
$15A + 6B \leq 3.600$	"	N° 2	m inecuaciones lineales
$6A + 12B \leq 3.000$	"	N° 3	

Función objetivo: maximizar $3.600\,A + 2.700\,B$

Paso 1 .- Convertimos las inecuaciones en ecuaciones, y utilizamos las variables de holgura que representan en este caso el concepto de capacidad ociosa en cada una de nuestras restricciones.

Capacidad ociosa (kg.) de insumos: K_1
" " (hr.) de máquinado: K_2
" " (hr.) de mano obra: K_3

Y tenemos:

$9A + 12B + K_1 = 3.000$	Restricción	N° 1	
$15A + 6B + K_2 = 3.600$	Restricción	N° 2	m ecuaciones lineales
$6A + 12B + K_3 = 3.000$	"	N° 3	

Paso 2.- Ordenamos nuestro sistema de ecuaciones en el que tenemos 3 ecuaciones y dos variables $(A; B, K_1, K_2, K_3)$ esto no tiene solución, por tanto econtramos 3 variables con valores positivos; como nos sobran dos variables le asignamos valor cero y tenemos:

$$9A + 12B + K_1 + 0K_2 + 0K_3 = 3.000$$
$$15A + 6B + 0K_1 + K_2 + 0K_3 = 3.600$$
$$6A + 12B + 0K_1 + 0K_2 + K_3 = 3.000$$

Ahora formamos un cuadro con los coeficientes de las ecuaciones:

Matriz 0

A	B	K_1	K_2	K_3	bi
9	12	1	0	0	3.000
15	6	0	1	0	3.600
6	12	0	0	1	3.000

bi = **disponibilidad del recurso**

Paso 3.- Agregamos dos columnas a las izquierda de la matriz.

X_j = variables que están presentes en cada solución básica. K_1, K_2, K_3

C_j = coeficiente de las variables que están en la solución (figuran en la columna Z_j) en la función objetivo.

Función objetivo Max $Z = 3.600\ A + 2.700\ B + 0\ K_1 + 0\ K_2 + 0\ K_3$

Por tanto en C_j se colocan ceros para cada una de las variables de holgura

Matriz 0

C_j	X_j	A	B	K	K	K	bi
0	K_1	9	12	1	0	0	3.000
0	K_2	15	6	0	1	0	3.600
0	K_3	6	12	0	0	1	3.000

La matriz 0 = producción nula (A = B = 0) como A y B no están presentes en la solución la CMT = 0.

Solución básica (trivial)

K_1 = 3.000 de insumos sin utilizar

K_2 = 3.600 horas máquina sin utilizar

K_3 = 3.000 horas mano de obra ociosa

Es factible porque 3 variables son(+)y A y B han sido anuladas.
El programa estará dado por bi, que nos indica el nivel de producción de producto A o B y niveles de capacidad sin utilizar K_1; K_2; K_3.

Paso 4.- Se agregan dos filas de cómputo en la matriz.

Matriz 0

C_j	Z_j	A	B	K_1	K_2	K_3	bi
0	K_1	9	12	1	0	0	3.000
0	K_2	15	6	0	1	0	3.600
0	K_3	6	12	0	0	1	3.000
	Z_j	0	0	0	0	0	
	C_j	3.600	2.700	0	0	0	
	$Z_j - C_j$	-3.600	-2.700	0	0	0	

Fila Z_j = al multiplicar el C_j de cada fila por los coeficientes correspondientes y sumando en cada columna las distintas filas, para este caso como todos los C_j = 0; entonces Z_j = 0 (esta fila nos indica el costo de oportunidad).

Fila C_j = a los coeficientes de la función objetivo.

$Z_j - C_j$ (restamos la fila C_j de la fila Z_j.

Paso 5.- Sistema de búsqueda

Paso 5.1. Variable a entrar en la solución

Como estamos maximizando, buscamos la variable de mayor coeficiente en la fila $Z_j - C_j$; en este caso - 3.600 A y es la que entra en la solución.

Paso 5.2. Variable a salir

Esta se encuentra en la columna Ø que indica la relación entre el término independiente y el coeficiente de la variable que entra en la solución.

	bi		A		Ø
Restricción N° 1	3.000	÷	9	=	333.33
Restricción N° 2	3.600	÷	15	=	240.0
Restricción N° 3	3.000	÷	6	=	500.0

Colocamos en la matriz la columna Ø

C_j	X_j	A	B	K_1	K_2	K_3	bi	Ø	
0	K_1	9	12	1	0	0	3.000	333.33	
0	K_2	15	6	0	1	0	3.600	240.0	→
0	K_3	6	12	0	0	1	3.000	500.0	
	Z_j	0	0	0	0	0			
	C_j	3.600	2.700	0	0	0			
	$Z_j - C_j$	-3.600	-2.700						
		↑							

Buscamos la fila de las restricciones que sea menor en este caso es K_2 que indica 240.0 de A (variable que sale entonces K_2).

Paso 6 - Sistema de cómputo

Definida la fila clave (variable que sale K_2) y la columna clave (variable que entra A) en la intersección de las dos obtenemos el pivot que en este caso es 15.

Se dividen todos los coeficientes de la fila K_2 para el pivot 15.

Paso 6.1.

	X_j	A	B	K_1	K_2	K_3	bi
Fila que sale	K_2	15	6	0	1	0	3.600
Se divide para 15 (pivot) *	A	$15 \div 15$	$6 \div 15$	$0 \div 15$	$1 \div 15$	$0 \div 15$	$3.600 \div 15$
Resultado	A	1	0,400	0	0,067	0	240

* Colocamos A en vez de K_2 ya que entra A y sale K_2.

Paso 6.2.

	Para las demás filas se calcula con la siguiente			
FORMULA:	Número antiguo −	Número correspondiente columna clave	x	Número de A del cuadro anterior en la columna que corresponda
Para la columna A :	9 −	9		(1)

Para K_1

	X_j	A	B	K_1	K_2	K_3	bi
Números antiguos	K_1	9	12	1	0	0	3.000
(Nº Correspondiente a la columna clave A)	K_1	9-9 (1)	12-9(0.4)	1-9(0)	0-9(0,067)	0-9(0)	3.000-9 (240)
Resultado Fila A							
	K_1	0	8,400	1	- 0,603	0	840

Para K_3

X_j	A	B	K_1	K_2	K_3	bi
K_3	6	12	0	0	1	3.000
K_3	6-6 (1)	12-6(0.4)	0-6(0)	0-6(0,067)	1-6(0)	3.000-6 (240)
K_3	0	9,600	0	- 0,402	1	1.560

Matriz 1

C_j	X_j	A	B	K_1	K_2	K_3	bi
3.600	A	1	0,400	0	0,067	0	240
0	K_1	0	8,400	1	-0,603	0	840
0	K_3	0	9,600	0	-0,402	1	1.560
	Z_j	3.600	1.440	0	241,2	0	864.000 *
	C_j	3.600	2.700	0	0	0	
	$Z_j - C_j$	0	-1.260	0	241,2	0	

Z_j = a multiplicar 3.600 x c/u (1 ; 0,400 ; 0 ; 0,067 ; 0 ; 240)

C_j = coeficientes F. Objetivo

Hemos obtenido así el primer programa

Producción de 240 de A y 0 de B

Contribución marginal total

CMT = 3.600 (240) + 2.700 (0)

CMT = 864.000 pesos *

$Z_j = 3.600\ (240) + 0\ (840) + 0\ (1.560)$

$Z_j = 864.000$

Restricción totalmente utilizada

Restricción N° 2 expresada en horas máquina y representado por $K_2 = 0$, ya que no se encuentra en la solución.
Restric ciones no utilizadas: tomando de la columna bi:

Restricción N° 1: 840 kg. no utilizados

Restricción N° 3: 1.560 hs. mano de obra no utilizada

Paso 7 (se repite sistemas de búsqueda y de cómputo)

Paso 7.1. Búsqueda

La fila $Z_j - C_j$ nos da un valor negativo - 1.260, lo que significa que cada kg. de B nos dará un beneficio adicional de 1.260 pesos.

Entonces B es la variable que entra y buscamos la variable que sale:

Sale:

De la matriz 1

	bi		B		Ø
A	240	÷	0.4	=	600.0
K_1	840	÷	8.4	=	100.0
K_3	1.560	÷	9.6	=	162.5

Entonces sacamos la menor que es K_1. Significa que produciremos 100 kg. de B y que al sumarla con los kgs. de A la restricción N° 1 va ha ser utilizada completamente, y K_1 sale y pasa a valor cero.

Colocamos la columna Ø en la matriz_1

<u>Matriz 1</u>

Primer programa

C_j	X_j	A	B	K_1	K_2	K_3	bi	Ø
3.600	A	1	0.4	0	0,067	0	240	600
0	K_1	0	8.4	1	-0,603	0	840	100 →
0	K_3	0	9.6	0	-0,402	1	1.560	162.5
	Z_j	3.600	1.440	0	241,2	0	864.000	
	C_j	3.600	2.700	0	0	0		
	Z_j-C_j	0	-1.260 ↑	0	241,2	0		

Pivot = 8.4 (K_1 se ÷ para 8.4 y se obtiene B)

<u>Paso 7.2.</u> - <u>Cómputo</u>

Fila clave

	X_j	A	B	K_1	K_2	K_3	bi
	K_1	0	8,4	1	-0,603	0	840
	B	0÷8,4	8,4÷8.4	1 ÷ 8.4	-0,603÷8.4	0÷8.4	840÷8.4
Resultado	B	0	1	0.119	-0.072	0	100

Cálculo de las demás filas

<u>Para A</u>

	X_j	A	B	K_1	K_2	K_3	bi
	A	1	0,4	0	0,067	0	240
-	A	1-0,4(0)	0,4-0,4(1)	0-0,4(0,119)	0,067-0,4(-0,072)	0-0,4(0)	240-0.4(100)
	A	1	0	-0,048	0.096	0	200

Para K_3

X_j	A	B	K_1	K_2	K_3	bi
K_3	0	9,6	0	-0,402	1	1.560
$-K_3$	0-9,6(0)	9,6-9,6(1)	0-9,6 (0,119)	-0,402-9,6(-0,072)	1-9,6(0)	1560-9,6(100)
K_3	0	0	-1,142	1,093	1	600

Obtenemos la Matriz II

Matriz II

C_j	X_j	A	B	K_1	K_2	K_3	bi
2.700	B	0	1	0,119	-0,072	0	100
3.600	A	1	0	0,048	0,096	0	200
	K_3	0	0	1,142	1,093	1	600
	Z_j	3.600	2.700	147,358	152,293	0	990.000
	C_j	3.600	2.700	0	0	0	
	$Z_j - C_j$	0	0	147,358	152,293	0	

Calculamos Z_j:

2.700 x los coeficientes de	B	0	2.700	321,3	-194.4	0	270.000
3.600 x " " "	A	3.600	0	-172,8	345.6	0	720.000
"	K_3	0	0	-1,142	1,093	1	-
Sumamos		3.600	2.700	147.3	152.93	0	990.000

Este segundo programa nos ofrece:

Producción

$A = 200$

$B = 100$

La contribución marginal

$Z = 3.600\ (200) + 2.700\ (100) = 990.000$ (columna bi en la fila Z_j)

Capacidad totalmente utilizada:

$A = 0$

$B = 0$

Comprobamos en las respectivas restricciones:

Restricción N° 1

$$9\ (200) + 12\ (100) \leq 3.000$$
$$3.000 = 3.000$$

Restricción N° 2

$$15\ (200) + 6\ (100) \leq 3.600$$
$$3.600 = 3.600$$

Restricción N° 3

$$6\ (200) + 12\ (100) \leq 3.000$$
$$2.400 < 3.000$$

Entonces tenemos 600 horas no aprovechadas que coincide con fila K_3 columna bi de la matriz II.

6.4.1. Conclusiones del caso

Como no existe $Z_j - C_j$ negativos, por tanto hemos llegado a la solución óptima.

6.5. Caso N° 7 - Fertilizantes (Minimización)

Una granja de Mayor Buratovich que siembra alfalfa, necesita comprar dos tipos de fertilizantes completos, que llamaremos P y W cuyos respectivos - costos son $ 50 el kg. y $ 25 el kg. Al analizar el suelo, las necesidades de nutrientes, se determinó que como mínimo debía suministrarse 8 kg. de - Urea, 19 kg. de Fósforo y 7 kg. de Potacio por cada parcela a sembrarse.

El contenido de esos elementos en los fertilizantes P y W es el siguiente:

	FERTILIZANTES	
	P	W
Cantidad de Urea por kg.	0.1	0.3
" de Fósforo por kg.	0.3	0.4
" de Potacio por kg.	0.3	0.1

Se pretende calcular la mezcla óptima que satisfaga los requerimientos de nutrientes del suelo para soportar los cultivos a plantarse y a un mínimo - costo para la empresa.

Planteo

Variables:

Fertilizantes: P
W expresados en kg. y cantidad de cada uno.

Función objetivo:

Mínimo costo de fertilizantes, representado por los respectivos costos de los fertilizantes P y W.

Siendo Z el costo total $Z = 50\,P + 25\,W$

Restricciones:

Cantidad de Urea por kg.: el fertilizante P debe tener 0.1 kg. de Urea y el fertilizante W 0.3 kg. y como mínimo 8 kg.

	Cantidad de Urea por kg.		$0.1\ P + 0.3\ W \geq 8$
El mismo análisis para Fósforo Potacio	"	de Fósforo "	$0.3\ P + 0.4\ W \geq 19$
	"	de Potacio "	$0.3\ P + 0.1\ W \geq 7$

Método Simplex:

Una vez que realizamos el planteo del problema, el primer paso es convertir en ecuaciones las inecuaciones.

Al tratarse de restricciones de tipo $\geq$ mayor o igual debemos incluir variables de holgura y variables artificiales.

$$0.1\ P + 0.3\ W - K_1 + \alpha_1 = 8$$
$$0.3\ P + 0.4\ W - K_2 + \alpha_2 = 19$$
$$0.3\ P + 0.1\ W - K_3 + \alpha_3 = 7$$

K_1, K_2 y K_3 variables de holgura representan el excedente en el uso del recurso.

α_1, α_2 y α_3 variables artificiales: se introducen para salvar la restricción de no negatividad.

Función objetivo

Minimizar $Z = 5.0\ P + 25\ W + OK_1 + OK_2 + OK_3 + M\alpha_1 + M\alpha_2 + M\alpha_3$

Siendo: $P \geq 0$; $W \geq 0$; $K_1 \geq 0$; $K_2 \geq 0$; $K_3 \geq 0$; $\alpha_1 \geq 0$; $\alpha_2 \geq 0$; $\alpha_3 \geq 0$

M es un coeficiente cualquiera de costo suficiente grande para que nos asegure la no inclusión de las variables artificiales en la solución óptima del problema.

Matriz inicial 0

C_j	X_j	P	W	K_1	K_2	K_3	α_1	α_2	α_3	bi	Ø
M	α_1	0.1	0.3	-1	0	0	1	0	0	8	26.66 →
M	α_2	0.3	0.4	0	-1	0	0	1	0	19	47.5
M	α_3	0.3	0.1	0	0	-1	0	0	1	7	70
	Z_j	0.7 M	0.8 M	-M	-M	-M	M	M	M	34 M	
	C_j	50	25	0	0	0	M	M	M		
	Z_j-C_j	0.7M -50	0.8 M -25	-M	-M	-M	-	-	-		

↑

Entra W, sale α_1.

Programa cero

Compra de los fertilizantes P = W = 0 kg.
Costo total $ 34 M (debido a la inclusión de las variables artificiales α_1, α_2 y α_3)

Restricciones

Con la introducción de las variables artificiales en esta primera solución básica factible: $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 19$, $\alpha_3 = 7$ (valores no negativos) $K_1 = K_2 = K_3 = 0$ están fuera de la solución (valor nulo).

Cumpliendo de este modo con el requisito de la no negatividad de las variables.

El programa cero equivale al punto de origen del método gráfico.

Hasta este punto aplicamos el Simplex de la misma forma que para un programa de maximización.

Sistema de búsqueda

Recordemos que la fila Z_j indica el monto de la pérdida (costo de oportunidad) por introducir una unidad variable modificando la solución, es decir pasando de un valor nulo a un valor positivo.

La fila C_j representa el coeficiente de participación de la función objetivo de las variables expuestas en la matriz.

En los problemas de minimización constituye el costo que se obtiene por introducir una unidad de cada variable en la solución.

Fila $Z_j - C_j$ se comparan los dos conceptos anteriores y se forma en esta fila que nos muestra el "resultado neto" de introducir una unidad de cada variable en la solución.

En problemas de minimización, si el resultado es positivo, el costo de oportunidad es mayor que el costo, por lo tanto la introducción de dicha variable es conveniente.

Si el resultado es negativo, el costo de oportunidad es menor que el costo, por lo tanto la introducción de dicha variable no es conveniente.

Para elegir la variable que ha de entrar en la solución (pasar de valor nulo a valor positivo) en los casos de minimización se elegirá aquel valor que figure en la fila $Z_j - C_j$ como el de mayor coeficiente positivo (menor costo). Se habrá llegado a la solución cuando todos los valores de la fila $Z_j - C_j$ sean ceros o negativos.

En la matriz 0 comparamos los distintos valores de la fila $Z_j - C_j$ dando un valor a M por Ej: de $ 100.000 lo suficientemente grande para eliminar de la solución a las variables artificiales.

$$0.7\ M - 5.000 = 0.7\ (100.000) - 5.000 = 65.000$$

$$0.8\ M - 2.500 = 0.8\ (100.000) - 2.500 = 77.500$$

Resulta W el mayor valor positivo. Significa que es conveniente su inclusión dado su mayor valor potencial positivo de mejoramiento. En consecuencia la variable que ha de entrar en la solución es W.

La variable que ha de salir se halla de idéntica manera a la explicitada para los problemas de maximización. Es la columna adicional $\emptyset$ que indica la relación entre el término independiente y el coeficiente de la variable que entra en la solución. Es el concepto de cantidad máxima de producción.

En la matriz 0 entonces la variable que ha de salir es α_1, la menor dominante de las demás (marcada en dicha matriz).

Resumen: Para un problema de minimización, la aplicación del método simplex se realiza sistemáticamente de la misma forma que en un problema de maximización. La única diferencia es que las variables que se introducen (pasan de valor nulo a valor positivo en los distintos programas) son las que tienen el mayor valor positivo en la fila $Z_j - C_j$ y por lo tanto la solución óptima se obtiene cuando todos los valores de $Z_j - C_j$ son negativos o nulos

Sistema de cómputo

Aplicamos sobre la matriz o para hallar una nueva solución básica factible y obtenemos así la matriz 1.

C_j	X_j	P	W	K_1	K_2	K_3	α_1	α_2	α_3	bi	∅
25	W	0.33	1	- 3.33	0	0	3.33	0	0	26.66	8.006
M	α_2	0.168	0	1.33	1	0	1.33	1	0	8.33	6.25 →
M	α_3	0.266	0	0.33	0	1	0.33	0	1	4.33	13.12
	Z_j	825 + 0.43 M	25	83.25 +1.66 M	M	M	83.25 1.66M	M	M	666.5 +12.66M	
	C_j	50	25	0	0	0	M	M	M		
	Z_j-C_j	0.43 M -41.75	0	1.66 M -83.25	-M	-M	-2.66M +83.25	0	0		

Esta matriz nos ofrece el primer programa.

Compra 26.66 kg. de fertilizante W

Costo total $Z = 25\ (26.66) + 12.66\ M$

$Z = 666.5 + 12.66\ M$

Restricciones: están fuera de la solución K_1, K_2, K_3 y la variable artificial α_1.

Aún figuran en la solución con valor positivo las variables artificiales α_2 y α_3 que al incorporarse en la función objetivo con coeficientes desfavorables seguramente desaparecerán en las próximas matrices.

Aplicamos nuevamente el sistema de búsqueda para elegir la variable a entrar con mayor valor positivo de $Z_j - C_j$.

Reemplazamos M = 100.000.

0.43 M - 41.75 =

0.43 (100.000) - 41.75 = 42.928.25 - 41.75 = 42.886.5

$1.66\ M - 83.25 = 165.916.75 - 83.25 = 165.833.5$

Los demás valores son negativos.
El mayor valor positivo corresponde a K_2 (marcado en el cuadro)
Variable a salir: menor valor columna $\emptyset$: α_2 (marcado en la matriz 1)
Efectuando los cómputos correspondientes obtenemos:

Matriz II

C_j	X_j	P	W	K_1	K_2	K_3	α_1	α_2	α_3	bi	$\emptyset$
0	K_1	0.126	0	1	-0.75	0	-1	0.75	0	6.25	-8.3
25	W	0.75	1	0	-2.50	0	0	2.5	0	47.47	-18.9
M	α_3	0.225	0	0	0.25	-1	0	-0.25	1	2.27	9.09 →
	Suma:	18.75			-62.50			62.5		1186.75	
	Z_j	0.225M	25	0	+0.25M	-M	0	-0.25M	M	+ 2.27M	
	C_j	5.0	25	0	0	0	M	M	M		
	Z_j-C_j	0.225M -31.25	0	0	0.25 M 62.50	-M	-M	62.5 -1.25M			

↑

$18.75 - 50 = 31.25$

Esta matriz II nos muestra el segundo programa:

Compra: 47.47 kg. de fertilizante W

Costo total $\quad Z = 25\ (47.47) + 2.25\ M$

$\quad Z = 1186.75 + 2.25\ M$

Restricciones: están fuera de solución $K_2 = K_3 = 0$ y las variables artificiales $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; K_1 representa el exceso en la utilización de Urea que es de 6.25 kg.

Aún queda por eliminar de la matriz la variable artificial α_3 dado que en la fila $Z_j - C_j$ nos encontramos aún con valores positivos, debemos seguir desarrollando el método; aún no hemos llegado al óptimo.

En este caso el mayor valor positivo corresponde a K_2. En efecto, si reemplazamos M por un costo de 10.000 pesos.

$$0.225\,M - 31.25 = 2.250 - 31.25 = 2.218.75$$

$$0.25\,M - 62.5 = 2.500 - 62.5 = 2.437.5$$

Los demás valores son negativos, por lo tanto irrelevantes. Entonces variable a entrar es K_2; variable a salir es α_3 (marcadas en la matriz III)

Aplicamos el sistema de cómputo.

Matriz III

C_j	X_j	P	W	K_1	K_2	K_3	α_1	α_2	α_3	bi	Ø
0	K_2	0.9	0	0	1	-4	0	-1	4	9	10 →
0	K_1	0.8	0	1	0	-3	-1	0	3	13	16.25
25	W	3	1	0	0	-10	0	0	10	70	23.33
	Z_j	75	25	0	0	-250			250	1.750	
	C_j	50	25	0	0	0	M	M	M		
	$Z_j - C_j$	25 ↑	0			-250	-M	-M	250-M		

Tercer programa: compra de 70 kg. de fertilizante P

Costo total $ 1.750 [(Z - 25 (70)]

Restricciones totalmente utilizadas: K_3 0

Reemplazando en la restricción N°3:

$$0.3\,P + 0.1\,W = 7$$
$$0.1\,(70) = 7$$
$$7 = 7$$

Las variables artificiales α_1, α_2, α_3 como era previsible, ya se encuentran fuera de la solución. Tienen valor cero, y eso se debe al coeficiente desfavorable M incorporando a cada una de ellas en la función objetivo.

Restricciones sin utilizar o excedente:

K_2 = 9 reemplazando: 0.4 (70) = 19 → excedente 9 kg.
K_1 = 13 " 0.3 (70) = 8 → " 13 kg.

Tenemos todavía un valor positivo en la fila $Z_j - C_j$ que es 25. Por consiguiente:

Variable a entrar P; variable a salir K_2 (restricción dominante) marcadas en la matriz III.

Aplicando el sistema de cómputo:

Matriz IV

C_j	X_j	P	W	K_1	K_2	K_3	α_1	α_2	α_3	bi
50	P	1	0	0	1.11	-4.44	0	-1.11	4.44	10
0	K_1	0	0	1	-0.88	0.55	-1	0.88	-0.55	5
25	W	0	1	0	-3.33	3.33	0	3.33	-3.33	40
	Z_j	50	25		-27.75	-138.75		27.75	138.75	1.500
	C_j	50	25	0	0	0	M	M	M	
	$Z_j - C_j$				-27.75	-138.75	-M	27.75 -M	138.75 -M	

No existe ningún $Z_j - C_j$ positivo, hemos llegado a la solución óptima.

Programa óptimo

Compra: 10 kg. de fertilizante P

40 kg. " " W

Mínimo costo total:

$$Z = 50\,P + 25\,W$$

$$Z = 50(10) + 25\,(40) = 1.500$$

Restricciones totalmente utilizadas; K_2 y $K_3 = 0$ fuera de la solución en efecto, reemplazando en la restricción N°2.

$$0.3\,(10) + 0.40\,(40) = \geq 19$$

$$3 + 16 \geq 19$$

No hay excedente; se utilizan 19 kg. de Fósforo.

Reemplazando en la restricción N° 3:

$$0.3\,(10) + 0.1\,(40) \geq 7$$

$$3 + 4 \geq 7$$

No hay excedentes, se utilizan 7 kg. de Potasio.

Restricciones sin utilizar o excedente: $k_1 = 5$

Reemplazamos en la restricción N°1.

$$0.1\,(10) + 0.3\,(40) \geq 8$$

$$13 \geq 8$$

Excedente 5 kg. en el uso de Urea

Como era previsible , las variables α_1, α_2, α_3 están fuera de la solución con valor igual a cero (nulo).

7. Tipos de restricciones en Programación Lineal

Las restricciones que determinan el ámbito de la optimización pueden ser de tipo:

Menor o igual $\leq$

Mayor o igual $\geq$

Igual (estricto) $=$

7.1. Restricciones del tipo menor o igual

El primer paso en el método simplex es convertir el sistema de m inecuaciones lineales a un sistema de m ecuaciones lineales.

En el caso de restricciones $\leq$ este paso se efectúa introduciendo las llamadas variables de holgura (slacks). Se introducen con signo positivo y constituyen las restricciones no utilizadas. Dado que su inclusión es consecuencia de convertir las desigualdades en igualdades, el coeficiente de estas variables en la función objetivo es de valor nulo: cero.

Su sentido del problema es el de representar el sobrante de la utilización de la disponibilidad del recurso.

En el caso N° 6, FOCO S.A. tomado para desarrollar el método simplex:

Función objetivo - Max. $Z = 3.600\ A + 2.700\ B$ sujeto a:

$$9\ A + 12\ B \leq 3.000$$
$$15\ A + 6\ B \leq 3.600$$
$$6\ A + 12\ B \leq 3.000$$

Siendo $A \geq 0$

$B \geq 0$

Al introducir las variables de holgura:

$$9\ A + 12\ B + K_1 = 3.000$$
$$15\ A + 6\ B + K_2 = 3.600$$
$$6\ A + 12\ B + K_3 = 3.000$$

K_1, K_2 y K_3 representan en este caso la capacidad ociosa en lás tres restricciones.

Función objetivo: $3.600\ A + 2.700\ B + 0K_1 + 0K_2 + 0K_3$

Siendo: $A \geq 0$; $B \geq 0$; $K_1 \geq 0$; $K_2 \geq 0$; $K_3 \geq 0$ (restricción de no negatividad)

Finalizando el desarrollo del método simplex, aparece en la solución del problema alguna variable de holgura con el valor positivo ($\neq$ de 0), el valor es precisamente el sobrante antes mencionado.

En nuestro ejemplo encontramos:

K_3 = 200, que significa 200 horas ociosas de mano de obra

Disponibilidad del recurso — Límite de la restricción

Recurso utilizado — Recurso no utilizado (concepto que representa la variable de holgura)

7.2. Restricciones de tipo mayor o igual

En este caso se introducen las variables de holgura con signo negativo para transformar las inecuaciones en ecuaciones. Conceptualmente nos va a distinguir el excedente en el empleo del recurso.

Analizando un ejemplo de dos cultivos que queremos producir y que maximice una función objetivo determinada, tenemos como dato que la demanda del - cultivo A es a lo sumo igual a 500 qq.

La restricción tendrá la siguiente forma: $CA \geq 500$

Esto significa que esta variable, que representa el cultivo A en la solución, debe tomar un valor superior o igual a 500 qq.

Transformamos esta inecuación en una ecuación, agregando la variable de holgura: $CA - K = 500$

Si en este ejemplo la solución es producir 600 qq del cultivo A, reemplazamos:

$$
\begin{aligned}
600 - K &= 500 \\
-K &= 500 - 600 \\
K &= -500 + 600 \\
K &= 100 \longrightarrow \text{Excedente sobre 500}
\end{aligned}
$$

Al graficar en una recta:

Empleo excedente en el recurso

Utilización requerida ($\geq$ al límite)

Límite de restricción

Pero aquí, al comenzar el desarrollo del método Simplex nos encontramos ante una dificultad. Este tipo de variable de holgura no cumple con al restricción de no negatividad de las variables.

Al plantear la primera solución factible básica (solución trivial producción = 0), donde tenemos como solución todas las variables de holgura, nos vamos a encontrar en este caso con un valor negativo:

K = 500 (ya que CA se hace igual a 0)

El inconveniente se soluciona mediante un artificio matemático, introduciendo un nuevo tipo de variables llamadas Artificiales con valor positivo, y luego se incluye en la función objetivo con un valor tal que haga posible su aparición en la solución final.

Si es maximización será un valor -M: suficientemente pequeño, al comparar con las demás variables, no sea mayor que éstas, por tanto no elegiremos su entrada en las soluciones. Si es minimización, será +M suficientemente grande para que siempre sea superior a las demás variables y así asegurarnos de que se encuentre en la solución final.

En el ejemplo:

$$CA - K + \alpha = 500$$

K = variable de holgura

α = " artificial

De este modo, al formar la primera solución factible básica haremos α = 500 y cumplimos con la restricción de no negatividad de las variables.

Si la función objetivo entonces:

Maximizar CMT: 1.500 CA + 100 CM

Quedará planteada:

Maximizar CMT = 1.500 CA + 100 CM + OK - Mα

(M = Coeficiente negativo cualquiera)

Resumiendo:

La diferencia esencial entre las variables de holgura y las variables artificiales radica en el hecho de las variables de holgura pueden ser $\neq$ de 0 cuando se alcanza el óptimo. En cambio las variables artificiales deben ser nulas cuando se obtiene el óptimo.

Estas condiciones surgen directamente de las circunstancias que las primeras se introducen en las inecuaciones para transformarlas en ecuaciones, mientras que las segundas se aplican a las ecuaciones únicamente para facilitar la obtención de la primera solución básica practicable.

7.3. Restricciones del tipo igual a cero

Si suponemos que una restricción nos indica que debemos producir exactamente 500 unidades del producto A:

$$A = 500$$

Para esta ecuación representativa de este tipo de restricciones, no tiene sentido incluir una variable de holgura, pues por el carácter de esta restricción no pueden existir excesos de unidades en la producción de A. (En este caso se cumple solo para los puntos de la recta en cuestión).

Al tener la ecuación, para calcular este tipo de restricciones en la matriz del método Simplex, y producir la primera solución, que resulta de anular las variables originales, es necesario vincularla con una variable artificial de cálculo.

Esta variable artificial, que se introduce con valor positivo para salvar la restricción de no negatividad de las variables, debe ser nula (valor cero) cuando se obtuvo la solución óptima.

Para asegurarse de que sea igual a cero en la solución final (fuera de la solución) deberá introducirse en la función objetivo con un coeficiente desfavorable.

Maximización: Coeficiente de contribución marginal negativo

Minimización: Coeficiente de costo infinitamente grande

Así podremos tener la seguridad de que las variables artificiales no formarán parte en la solución óptima del problema.

En el ejemplo:

Minimizar costos $= 35\,A + 70\,B$

El planteo de la restricción y de la función objetivo es:

$$A + \alpha = 70$$

α = variable artificial: artificio de cálculo para facilitar la solución del problema

Minimizar costos: $35\,A + 70\,B + M\alpha$

Siendo M coeficiente cualquiera de costo suficientemente grande

En el caso que fuera un problema de maximización

Maximizar CMT: $35\,A + 70\,B - M\alpha$

Siendo M: coeficiente de contribución marginal negativo (suficientemente pequeño)

7.4. Restricciones de tipo mayor estricto o menor estricto

Cuando tenemos problemas con restricciones $>$ ó $<$ estricto debemos convertirlas y expresarlas al tipo $\geq$ ó $\leq$. Y así permitir el desarrollo de algunas de las tipificaciones mencionadas. En efecto, si intentamos su solución nos encontramos con la dificultad que al convertir las inecuaciones en ecuaciones, la variable de holgura a introducir, debería tener además las característi-cas de una variable artificial. En efecto, para cumplir con la restricción debería figurar indefectiblemente en la solución óptima (no tomar valor cero).

Ejemplo:

$$A > 34$$

$$A + K = 34$$

K para cumplir con esta restricción no debe ser igual a cero en la solución óptima, de este modo se cumplirá la igualdad. Siempre debe tener un valor positivo. Esto implica que no podemos asignarle valor cero a la función objetivo, como debe efectuarse en las variables de holgura. Deberíamos asignarle un coeficiente favorable para asegurarnos su inclusión en la solución final.

Para salvar estas dificultades, se cambia el planteo, llevándolo a un límite inferior para que sea factible la igualdad y así tratarlo conceptualmente como $\leq$

Por tanto:

$A \leq 32$ ó

$A \leq 33$ (según la índole del problema)

Para el caso de restricciones de $>$ mayor estricto se hará la misma conversión, (a un límite superior) para expresarlas como $\geq$.

7.5. Resumen

Cuadro de pasos a seguir en las distintas restricciones

TIPO DE RESTRICCIONES	INCLUSION VARIABLES DE HOLGURA Y ARTIFICIALES	FUNCION OBJETIVO	
		MAXIMIZACION	MINIMIZACION
$X_1 + X_2 \leq bi$	$X_1 + X_2 + K = bi$	$+ OK$	$+ OK$
$X_1 + X_2 \geq bi$	$X_1 + X_2 - K + \alpha = bi$	$- OK - M\alpha$	$+ OK + M\alpha$
$X_1 + X_2 = bi$	$X_1 + X_2 + \alpha = bi$	$- M\alpha$	$+ M\alpha$
		Transformar en:	
$X_1 + X_2 < bi$		$X_1 + X_2 \leq bi$	
$X_1 + X_2 > bi$		$X_1 + X_2 \geq bi$	

8. Caso N° 8 - Peletizadora (harina y pastillas de alfalfa)

8.1. Maximización y una mezcla de restricciones de $\leq$ y $\geq$

La Planta Peletizadora de Alfalfa de Villalonga procesa dos productos: harina, producto A y pastillas de alfalfa, producto B, pudiendo obtenerse -- 50.000 kg. de (A) o del producto C en el próximo período mensual.

El producto B (pastillas) puede procesarse con 1 kg. de Santoquin (antioxidante) o comprarse a una empresa proveedora para también incluirlo en el proceso.

Para el próximo mes hay disponibilidades de 12.500 kg. de antioxidante. El contrato vigente con la empresa proveedora del producto B exige una compra mínima de 20.000 unidades.

Los márgenes de contribución por producto son:

Para A \$ 8; para el producto B procesado internamente \$ 20 y para el producto B comprado \$ 10.

Se averigua que cantidad de productos es necesario trabajar el próximo mes para maximizar la contribución marginal total.

8.2. Planteo del problema

Identificación de las variables

Los productos a identificarse son 3:

A. Harina: Producto A

B. Pastillas: Producto B comprado

C. Pastillas: Producto B producido internamente con (antioxidante)

Función objetivo

Maximizar CMT $ 800 A + $ 1.000 B + $ 2.000 C

Restricciones

N°1: Los 50.000 kg. de capacidad en el proceso

$$A + B + C \leq 50.000$$

N°2: Los 12.500 kg. de antioxidante para el producto B procesado internamente (identificamos con la letra C)

$$C \geq 12.500$$

N°3: La compra mínima de 20.000 kg. para el producto B (identificamos con la B).

$$B \geq 20.000$$

8.3. Resolución (Método Simplex)

Convertimos en ecuaciones las inecuaciones:

$$\begin{aligned} A + B + C + K_1 &= 50.000 \\ C + K_2 &= 12.500 \\ B + K_3 + \alpha &= 20.000 \end{aligned}$$

Función objetivo:

Maximizar CMT = 8 A + 10 B + 20 C + OK_1 + OK_2 + OK_3 - $M\alpha$

Siendo A ≥ 0; B ≥ 0; C ≥ 0; $K_1 \geq 0$; $K_2 \geq 0$; $K_3 \geq 0$; $\alpha \geq 0$

Matriz 0

C_j	X_j	A	B	C	K_1	K_2	K_3	α	bi	$\emptyset$
0	K_1	1	1	1	1	0	0	0	50.000	50.000
0	K_2	0	0	1	0	1	0	0	12.500	∞
-M	α	0	1	0	0	0	-1	1	20.000	20.000 →
	Z_j	-	M	-	-	-	M	-M	-20.000M	
	C_j	8	10	20	-	-	-	-M		
	Z_j-C_j	-8	-M-10 ↑	-20	-	-	M	0		

Entra B, sale α

Programa 0

Producción A = B = C = 0

Contribución marginal total \$-20.000M (debido a la inclusión de la variable artificial α).

Restricciones no utilizadas: K_1 = 50.000 kg.; K_2 = 12.500

Restricción de $\geq$: restricción N° 3

Con la introducción de la variable artificial, en la primera solución básica - factible α = 20.000 (no negativo) y K_3 que tiene en el planteo de la restricción valor negativo, aquí está fuera de la solución (valor nulo), cumpliendo así con el requisito de no negatividad de las variables.

Al aplicar el sistema de búsqueda para eligir la variable que ha de entrar en la solución (pasar de valor nulo a un valor positivo) como estamos ante un caso de maximización, se eligirá aquel valor que sigue en la fila $Z_j - C_j$ como el de <u>mayor coeficiente negativo</u>.

En dicha fila tenemos el valor -M-10 que si reemplazamos por M = 100 será igual a -110 y resultará el de mayor coeficiente negativo. En consecuencia la variable que entra en la solución es B.

La variable que ha de salir (el coeficiente menor de la columna Ø) es ∝: la variable artificial. Esta conclusión se desprende lógicamente del hecho que el coeficiente de la variable artificial que se incorpora a la función objetivo es desfavorable, para asegurarnos que no se encuentre en la solución. De este modo, las variables artificiales (en la generalidad de los casos) son las primeras que salen de la solución.

Aplicamos el sistema de cómputo sobre la matriz 0 y obtenemos así la matriz I.

Matriz I

C_j	X_j	A	B	C	K_1	K_2	K_3	∝	bi	Ø
10	B	0	1	0	0	0	-1	1	20.000	∝
0	K_1	1	0	1	1	0	1	-1	30.000	30.000
0	K_2	0	0	1	0	1	0	0	12.500	12.500 →
	Z_j	-	10	-	-	-	-10	10	200.000	
	C_j	8	10	20	-	-	-	-M		
	Z_j-C_j	-8	-	-20 ↑	-	-	-10	10+M		

Entra C y sale K_2

Producción 20.000 unidades de B

Contribución marginal total : CMT = 200.000

Restricción totalmente utilizada: Restricción N°3, representada por $K_3 = 0$

Además la variable artificial correspondiente a esta restricción tiene valor nulo: ∝ = 0.

Restricciones no utilizadas:

Restricción N°1: K_1 = 30.000 kg. (tratados)

Restricción N°2: K_2 = 12.500 kg. de antioxidante

Ahora aplicamos nuevamente el sistema de búsqueda para elegir:

Variable a entrar: B; variable a salir K_2 (marcadas en la Matriz I). Efectuando los cómputos correspondientes, obtenemos:

Matriz II

C_j	X_j	A	B	C	K_1	K_2	K_3	α	bi	$\emptyset$
20	C	0	0	1	0	1	0	0	12.500	α
10	B	0	1	0	0	0	1	1	20.000	-
0	K_1	1	0	0	1	1	1	-1	17.500	17.500 →
	Z_j	-	10	20		20	10	10		
	C_j	8	10	20	-	-	-	-M		
	Z_j-C_j	-8	-	-		20	-10 ↑	10+M		

Entra K_3 y sale K_1

Esta matriz nos muestra el segundo programa:

Producción 20.000 kg. de B y 12.500 de C

Contribución marginal total CMT = 450.000

Restricción totalmente utilizada:

Restricción N°2 representada por $K_2 = 0$

Restricción N°3 " " $K_3 = 0$ y además $\alpha = 0$.

Restricciones no utilizadas:

Restricción N°1 17.500 kg. (representada por K_1)

Dado que en la fila $Z_j - C_j$ nos encontramos con valores negativos, debemos seguir desarrollando el método; aún no hemos llegado al óptimo.

En este caso el mayor valor negativo corresponde a K_3 variable que ha de entrar en la solución. La restricción dominante corresponde a K_1, variable que va a salir de la solución.

Aplicamos el sistema de cómputo y tenemos:

Matriz III

C_j	X_j	A	B	C	K_1	K_2	K_3	α	bi
0	K_3	1	0	0	1	-1	1	1	17.500
20	C	0	0	1	0	1	0	0	12.500
10	B	1	1	0	1	-1	0	0	37.500
	Z_j	10	10	20	10	10	-	-	625.000
	C_j	8	10	20	-	-	-	-M	
	Z_j-C_j	2	-	-	10	10	-	M	

No existe ningún $Z_j - C_j$ negativo. Hemos llegado a la solución óptima. Por tanto el tercer programa es el óptimo.

Producción:

12.500 kg. del producto C

37.500 kg. de semilla B

Comprobación marginal total = \$ 625.000

Restricciones totalmente utilizadas: $K_1 = 0$; $K_2 = 0$

Además la variable artificial $\alpha = 0$ (no figura en la solución óptima)
Si comprobamos en las respectivas restricciones:

Restricción N° 1:

$$A + B + C \leq 50.000$$
$$A + B + C + K_1 = 50.000$$
$$37.500 + 12.500 = 50.000$$
$$50.000 = 50.000$$ Está totalmente utilizada

Restricción sin utilizar o excedente:

$K_3 = 17.500$

Dado que la restricción planteada era: $B \geq 20.000$, que convertimos en:

$$B - K_3 + \alpha = 20.000$$

K_3 significa conceptualmente el excedente en el recurso. En efecto, si se producen 37.500 kg. de B, es igual a 17.500 unidades en exceso comparadas con el límite mínimo de 20.000 unidades.

Si reemplazamos:

$$37.500 - 17.500 = 20.000$$

17.500 = valor que representa K_3 (variable de holgura de una restricción del tipo $\geq$).

9. El Método Dual

El Dual de un problema de Programación Lineal determina el costo de oportunidad que ocasiona no tener una unidad más disponible de los recursos totalmente utilizados. Los recursos no totalmente utilizados no tienen valor marginal, no entran en el análisis.

Un gerente o empresario agrícola de una empresa no le interesan aquellos recursos que no están agotados, ya que por ellos el nivel de producción se puede aumentar y por consiguiente aumentar el beneficio total. Estos no son los cuellos de botella, las primeras vallas que encontramos en el camino de la optimización, sino las últimas.

El problema dual de un caso de programación lineal determina el costo de oportunidad derivado de no tener una unidad más disponible de los recursos totalmente utilizados. Este problema se relaciona estrechamente con el significado del criterio Simplex.

El cuadro final del método Simplex no solo da solución al nivel de actividad de un problema de Programación Lineal, sino que además proporciona importante información sobre el costo de la desviación óptima y sobre el valor imputado a los recursos que se emplean en forma total.

Por tanto los "valores duales" se encuentran presentes en el cuadro óptimo (último) del método Simplex directo.

- El dual de un problema de maximización es un problema de minimización y el dual de un problema de minimización es uno de maximización.

9.1. Relaciones entre el Problema directo y el Dual

- El problema dual tiene una variable de actividad por cada restricción del problema original. Esto significa que si el problema por el método Simplex tiene 3 restricciones, el problema dual correspondiente contará con 3 variables de actividad (las que optimizarán la función objetivo Z del problema dual).

- El problema dual tiene tantas restricciones como variables de actividad - existentes en el problema directo original.

Problema directo | Problema dual

Función objetivo

Z = 2 A + 3 B

Variables de actividad ⟶ dos restricciones [1°ecuación, 2°ecuación]

- Los coeficientes de la función objetivo (ganancias o costos) son los términos independientes de las restricciones (disponibilidad total de los recursos) del problema dual.

Problema directo | Problema dual

Max Z = 2 A + 3 B

Coeficiente de la función objetivo ⟶ Dos restricciones

1°ecuación > = < 2

2°ecuación > = < 3

Términos independientes

- Los términos constantes de las restricciones del problema directo son los coeficientes de la función objetivo del problema dual.

Problema directo | Problema dual

Restricciones: | Función objetivo

2 A + B 40

8 A + 4 B 75

Max Z ó Min Z = 40 C + 75 D

- Los coeficientes de una variable en las inecuaciones del problema original aparecen como coeficientes de una inecuación en el dual o sea cada columna de coeficientes en el conjunto de restricciones del problema directo se transforma en una fila de coeficientes del problema dual (se dice que el dual se obtiene acostando al directo).

Problema directo Restricciones	Problema dual Restricciones
$\boxed{2}\ A + \boxed{}\ B \geq 40$	$2\,C + 8\,D \leq B$
$\boxed{8}\ A + \boxed{4}\ B \leq 75$	$C + 4\,D \geq B$

- El sentido de las desigualdades en el dual es el inverso del sentido de las desigualdades en el problema original.

Se mantiene la condición que las variables sean $\geq$ cero

Problema directo Restricciones	Problema dual
$2\,A + B \geq 40$	$2\,C + 8\,D \leq B$
$8\,A + 4B \leq 75$	$C + 4\,D \geq B$

Cuadro N°

Relaciones entre el Problema directo y el dual

Problema directo	Problema dual
-Maximización	Minimización
-Minimización	Maximización
-Número de restricciones	Número de variables de actividad
-Número de variables de actividad	Número de restricciones
-Coeficiente de la función objetivo	Términos independientes restricciones
-Términos independientes restricciones	Coeficientes función objetivo
-Coeficientes restricciones (horizontal)	Coeficientes restricciones (vertical)
-Signo inecuaciones	Cambia el signo
$\geq$	$\leq$
$\leq$	$\geq$
$>$	$<$
$<$	$>$
$=$	$=$

9.2. Problema dual a partir de la matriz óptima Simplex del Caso N° 6 (FOCO S.A. - Maximizar)

Suponemos el planteo del caso de un problema directo

Variable de actividad X_j: Nivel de producto A yB

Función objetivo: Max Z = 3.600 A + 2.700 B

Restricciones:

N°1: $9 A + 12 B \leq 3.000$ (insumos)

N°2: $15 A + 6 B \leq 3.600$ (maquinarias)

N°3: $6 A + 12 B \leq 3.000$ (mano de obra)

Restricción de no negatividad: $A, B \geq 0$

9.2.1. Planteo del Caso

Variable de actividad Y_1: Productividad marginal recurso

Y_1; Y_2; Y_3

Función objetivo: Minimizar $Z = 3.000 Y_1 + 3.600 Y_2 + 3.000 Y_3$

Restricciones:

N°1: $9 Y_1 \quad 15 Y_2 \quad 6 Y_3 \geq 3.600$

N°2: $12 Y_1 \quad 6 Y_2 \quad 12 Y_3 \geq 2.700$

Restricción de no negatividad Y_1 ; Y_2 ; $Y_3 \geq 0$

Sabemos que los recursos totalmente utilizados no tienen valor marginal, no entran en el análisis.
En este caso la solución por el Simplex agota los recursos de insumos y máquinas y con un sobrante de 200 horas de mano de obra. Podemos entonces prescindir de la restricción N° 3 en el planteo original.

Por tanto:

Minimizar $Z = 3.000 Y_1 + 3.600 Y_2$

Sujeto a:

$$9 Y_1 + 15 Y_2 \geq 3.600$$
$$12 Y_1 + 6 Y_2 \geq 2.700 \qquad Y_1 \geq 0$$

9.2.2. Solución Dual

Existen dos alternativas para hallar los valores duales:

a. Resolver el problema dual por el Método Simplex (para este caso se puede resolver también por el Método Gráfico puesto que tenemos dos variables).

b. Hallar dichos valores en la matriz óptima del Método Simplex aplicado al problema directo o (Primal). Por tanto anotamos:

Matriz II

C_j	X_j	A	B	K_1	K_2	K_3	bi
2.700	B	0	1	0,119	0,072	0	100
3.600	A	1	0	0,048	0,096	0	200
0	K_3	0	0	-1,142	1,093	1	600
	Z_j	3.600	2.700	147,358	152,293	0	990.000
	C_j	3.600	2.700	0	0	0	
	Z_j-C_j	0	0	147,358	152,293	0	(óptimo)

Por tanto la solución óptima que ofrece este cuadro final es :

Producción :

200 de A

100 de B

Contribución marginal total 990.000 reemplazando:

$Z = 3.600\ (200) + 2.700\ (100)$

Capacidad totalmente utilizada

K_1 0 (insumos)

K_2 0 (horas máquinas)

No están presentes en la solución (columna X_j)

Capacidad sin utilizar:

K_3 : 200 horas de mano de obra (columna bi)

La fila $Z_j - C_j$ nos muestra el "resultado neto" de introducir una unidad de cada variable en la solución. Surge de la comparación de las dos filas anteriores.

En los problemas de maximización de la contribución marginal:

Si el resultado es positivo: el costo de oportunidad es mayor que el beneficio,por tanto la introducción de dicha variable da pérdida.

Si es negativo: el beneficio es mayor que el costo de oportunidad por lo tanto se obtiene un benefico marginal en la introducción de dicha variable.

Los valores que figuran en la fila $Z_j - C_j$ en las columnas K_1 y K_2 son 147,358 y 152,293, representan que los recursos están totalmente utilizados, agotados.

Estos son los valores duales que significan:

Que el rendimiento marginal del recurso K_1 (insumos) es 142.85 por unidad y es el valor máximo que el gerente de la empresa debe estar dispuesto a - pagar para obtener 1 kg. de insumos disponibles (siempre bajo los supuestos de la competencia perfecta).

El rendimiento marginal del otro recurso K_2 (máquinas) es también ---- \$ 71.65 por unidad, es el valor máximo que debe pagarse para la obtención de 1 hora de trabajo de las máquinas para la producción.

Estos valores duales nos dicen entonces, la mejora máxima en el beneficio por unidad de aumento en la disponibilidad.

Para el caso, al agregar 1 kg. de insumos, el valor del óptimo obtenido aumenta en \$ 142.85 y al agregar una hora de maquinado el valor óptimo se aumentará en \$ 71.65. Por lo tanto estos montos representan el máximo a pagar por esos aumentos de recursos.

Comprobamos:

Minimizar $Z = 3.000\ Y_1 + 3.600\ Y_2$

Z Problema directo \$ 990.000

Dado que Z primal = Z dual

$990.000 = 3.000\ Y_1 + 3.600\ Y_2$

Reemplazamos:

$990.000 = 3.000\ (147,358) + 3.600\ (152,293)$

$990.000 = 382.074 + 548.254$

De esta manera demostramos que los valores duales ya están presentes en el cuadro óptimo del Método Simplex de un problema directo de programación lineal.

10. Interpretación de resultados

Al existir medios idoneos y altamente veloces para la solución del Método - Simplex, como el computador, es necesario saber interpretar y analizar los resultados que éste nos ofrece sobre problemas de Programación Lineal.

Analizamos una matriz del tipo menor o igual (maximización)

C_j	X_j	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	bi
3	X_1	1	0	0	-0,14	0,57	57,14
5	X_2	0	1	0	0.28	-0,14	185.72
0	X_3	1	0	1	-0,43	-0,28	71.43
	Z_j	3	5	0	0.98	1.01	1.100.02
	C_j	3	5	0	0	0	
	Z_j-C_j	0	0	0	0.98	1.01	1.100.02

En esta matriz no se conoce el planteamiento original del problema; por tanto:

- Variables originales X_1 y X_2 (se saca de la fila C_j donde X_1 y X_2 son las únicas que tienen coeficiente positivo; esto nos da la pauta que son las variables de actividad. Caso maximización).

- Variables de holgura X_3 ; X_4 ; X_5 (ya que en la fila C_j tienen ceros)

- No existen variables artificiales: esto indica que es un caso del tipo $\leq$

- Se trata de la matriz óptima o última, porque $Z_j - C_j$ nos muestra el resultado neto, ya que no encontramos ningún coeficiente negativo.

- El programa que ofrece la matriz está en la columna bi y es

  X_i = 57.14 unidades
  X_2 = 185.72 "

- Las restricciones totalmente utilizadas son las que tienen valor nulo; éstas son las que no se encuentran en la columna X_j que nos indica las que están presentes. Por tanto:

  No se encuentran las variables X_4 y X_5, son de holgura pues la fila C_j tiene coeficientes = 0 (están totalmente agotadas).
  Las restricciones que no están totalmente agotadas están en X_j y solamente X_3 es variable de holgura que representa la restricción (lo vemos en C_j contribución 0).

  Si esta es la solución, no está totalmente utilizada.
  ¿Cúanto es su nivel de desaprovechado? (por ser restricción ≤ 0). Encontramos en bi que nos indica el nivel de las variables presentes en la solución.

  $X_3 = 71.43$ La restricción X_3 tiene un desaprovechamiento de 71.43 unidades.

- La función objetivo están en C_j

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5$$

- El valor de la función objetivo está en la intersección de bi y Z_j.
  Z_j se obtiene multiplicando C_j de cada fila por los coeficientes correspondientes y sumando en cada columna las distintas filas $C_j \; \Sigma_j \; C_j \; X_j$. Por tanto el valor de la intersección de dicha fila con bi se obtiene:

$$Z_j = 3(57.14) + 5(185.72) + 0(71.43)$$

$$Z_j = 1.100.02$$

  Consiste en reemplazar en la función objetivo los valores solución de este programa (57.14 para X_1 y 185.72 para X_2)

  Por tanto el valor de Z óptimo = 1.100.02 pesos

- Si analizamos la columna X_5 :

  Recordemos que la ecuación lineal $y = Ax$ (A representa en cuanto varía y en relación con la variación de una unidad x).

$$Y = -2\ x$$

Por cada unidad de incremento de X ; Y disminuye en dos unidades. Entonces debemos analizar primero el tipo de variable (actividad, holgura o artificial) y segundo el signo del coeficiente.

Cuadro N°

COMBINACIONES POSIBLES

TIPO DE VARIABLE COLUMNA	SIGNO	TIPO DE VARIABLE FILA	CONCEPTO
Actividad	+	Actividad	Utilizar, dejar de producir
Actividad	-	Actividad	Liberar, producir más
Actividad	+	Slack	Usar, ocupar
Actividad	-	Slack	Liberar
Slack	+	Actividad	Aumento, producir más
Slack	-	Actividad	Merma, producir menos
Slack	+	Slack	Liberar, aumento de sobrante
Slack	-	Slack	Utilizar, disminución de sobrante

Recordemos que las variables artificiales no tienen significado económico; se incorporan para cumplir la restricción de no negatividad de las variables.

Analizando la columna X_5 (variable de holgura o slack)

X_1 0.57 (Por cada unidad adicional de X_5, se liberará, se producirá más (signo +) 0.57 unidades de la actividad X_1)

X_2 -0.14 (Al introducir una unidad de X_5 en la solución, se utilizará, se dejará de producir (signo -) 0.14 unidades de la actividad X_2

X_3 -0.28 (Una unidad adicional de X_5 implica que se utilizará, se disminuirá del sobrante (-) en 0.28 unidades de la restricción de la variable X_3.

- Al ser el cuadro óptimo el que tenemos en este ejemplo. Esto implica que encontramos los valores duales en los recursos que se encuentran totalmente utilizados. Los encontramos en la fila $Z_j - C_j$ para las columnas encabezadas por X_4 y X_5 que son las restricciones agotadas.

X_4 = 0.98 Rendimiento marginal

X_5 = 1.01 " "

Estos valores nos dan la mejora máxima en el beneficio, por unidad de aumento en la disponibilidad. Por tanto al agregar 1 unidad X_4 el valor del óptimo, aumenta en \$ 0.98. Al agregar 1 unidad de X_5, el valor del óptimo aumenta en \$ 1.01.

NOTA: No se puede reconstruir el problema original totalmente, ya que carecemos del planteo del mismo.

10.1. Restricciones del tipo igual estricto (Maximización)

Matriz Resultado de algún paso del Método Simplex

C_j	X_j	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	bi
0,1	X_3	0	0	1	0	1	0	12.500
-M	X_4	1	1	0	1	-1	0	37.500
-M	X_6	0	1	0	0	0	1	20.000
	Z_j	-M	-2M	0.1	-M	0,1+M	-M	1.250-57.500M
	C_j	0,04	0,05	0.1	-M	-M	-M	
	Z_j-C_j	-M	-2M	-	-	0,1+2M	-	
		0,04	-0,05					

Las variables de actividad son X_1; X_2; X_3, ya que tienen contribución positiva de 0,04; 0,05 y 0,1 respectivamente (fila C_j).

X_4; X_5 y X_6 son variables artificiales por tener coeficiente de contribución negativo (caso de maximización) -M lo suficientemente pequeño para asegurarnos la no inclusión en la solución óptima.

Al no existir variables de holgura (con coeficiente de contribución = 0). Por tanto se trata de 3 restricciones $\geq$ (si existieran variables de holgura serían del tipo $\geq$).

El cuadro del análisis es intermedio, puesto que al ser el último no tendría coeficientes negativos en la fila $Z_j - C_j$.

El programa que presenta el cuadro es:

X_3: 12.500 unidades (variable de actividad)

X_4: 37.500 " no utilizadas (variable artificial)

X_6: 20.000 " o no utilizadas (variable artificial)

X_1 y X_2: Variable de actividad = 0 (Fuera de la solución)

X_5: Variable artificial: fuera de solución

Las variables X_4 y X_6 desaparecerán en las próximas matrices, ya que el método Simplex nos asegura que al incluirlas con coeficiente desfavorable en la función objetivo no van a estar presentes en la solución.

La función objetivo es (fila C_j)

$$\text{Max } Z = 0.04\ X_1 + 0.05\ X_2 + 0.1\ X_3 - M\ X_4 - M\ X_5 - M\ X_6$$

El valor de la función objetivo en este cuadro es Z = \$ 1.250 - 57.500 M.

El término subrayado se debe a la inclusión de las variables artificiales X_4 y X_6 en la solución.

10.2. Minimización Restricciones de tipo $\geq$

Matriz

C_j	X_j	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	bi
2.5	X_2	0	1	-3/8	1/4	3/8	-1/4	2.5
3	X_1	1	0	1/4	-1/2	-1/4	1/2	15
	Z_j	3	2.5	-3/16	-7/8	-3/16	7/8	51.25
	C_j	3	2.5	0	0	M	M	
	Z_j-C_j	0	0	-3/16	-7/8	-3/16	7/8	
						M	M	

Las variables de actividad son X_1 y X_2.
" " " holgura son X_3 y X_4 (contribución = 0 en la función objetivo: fila C_j.
Las variables artificiales son X_5 y X_6: costo = +M en la función objetivo (suficientemente grande en casos de minimización).

Restricciones 2 del tipo $\geq$

Si recordamos que para casos de minimización la fila $Z_j - C_j$ significa si el resultado es + el costo de oportunidad es $>$ que el costo, por lo tanto la introducción de dicha variable es conveniente.
Si el resultado es - el costo de oportunidad es $<$ que el costo por lo tanto la introducción de dicha variable no es conveniente.
Como en esta matriz todos los valores son ceros o negativos, implica que se trata de la matriz óptima.

El programa que nos muestra es:

X_2: 2.5 unidades

X_1: 15 unidades

Restricciones totalmente utilizadas $X_3 = X_4 = 0$ fuera de solución

No existen restricciones no utilizadas

X_5 y X_6 variables artificiales = 0 fuera de solución

Función objetivo:

Min. $Z = 3 X_1 + 2.5 X_2$

El Z óptimo ($Z <$) es = a \$ 51.25

Coeficientes de la Matriz:

X_3 columna: -3/8: al introducir una unidad de la Restricción X_3 se utilizará, se dejará de producir (signo -) 3/8 unidades de la variable de actividad X_2.

1/4: una unidad adicional de X_3 implica liberar un aumento de producción de 1/4 unidades de la variable X_1.

NOTA: Al no conocer el planteo del problema no sabemos que tipo de actividad suponen las variables X_1 y X_2, suponemos aquí el caso típico de producción.

-3/6: costo de oportunidad de entrar en la solución una unidad de X_3.

0: costo de introducir una unidad de X_3

-3/16: pérdida marginal por introducir una unidad de X_3. Además este es el valor dual del recurso agotado X_3. Si aumentamos en una unidad la disponibilidad del recurso X_3 la función objetivo mejorará (en este caso disminuirá) en - \$ 3,16 ; representa además el máximo a pagar por esa unidad de X_3.

10.3 Combinación de restricciones (Maximización)

Matriz

C_j	X_j	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	α_1	bi
0	X_3	20	10	1	0	0	0	0	10.000
0	X_4	0	10	0	1	0	0	0	6.000
0	X_5	1	1	0	0	1	0	0	900
-M	α_1	1	0	0	0	0	-1	1	100
	Z_j	-M	0	0	0	0	M	-M	-100M
	C_j	30	20	0	0	0	0	-M	-
	Z_j-C_j	-M -30	-20	0	0	0	M	0	

Variable de actividad X_1 y X_2
" de holgura X_3 ; X_4 ; X_5 ; X_6
" artificial α_1 (coeficiente = -M en la fila C_j)

Restricciones combinadas $\leq$ y $\geq$

En la matriz primera; es por ello que se puede hacer el planteo del problema original.

Función objetivo.

$$\text{Max } Z = 30 X_1 + 20 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 - M \alpha 1$$

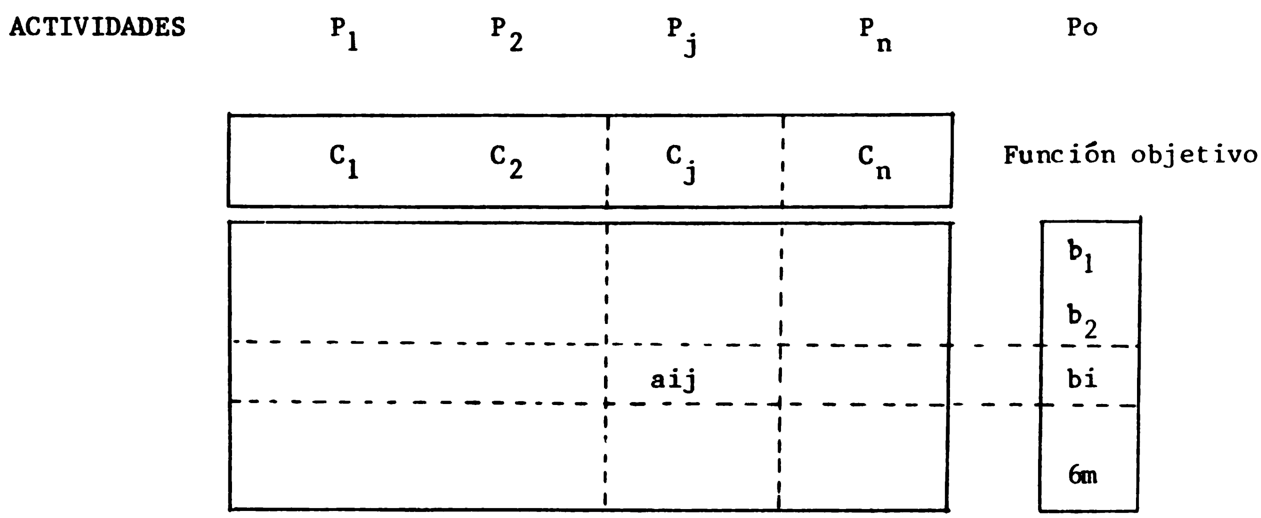
Sujeto a las siguientes restricciones:

Rest. N°1 $20 X_1 + 10 X_2 + X_3 = 10.000 \therefore 20 X_1 + 10 X_2 \leq 10.000$
Rest. N°2 $10 X_2 + X_4 = 6.000 \therefore 10 X_2 \leq 6.000$
Rest. N°3 $X_1 + X_2 + X_5 = 900 \therefore X_1 + X_2 \leq 900$
Rest. N°4 $X_1 - X_6 + {}_1 = 100 \therefore X_1 \geq 100$

Con estos ejemplos se ha interpretado todas las cifras que pueden aparecer en el método Simplex.

11. Construcción de Modelos de Programación Lineal para computadora *

Como se indica anteriormente, la resolución de problemas de programación lineal implica la preparación de un "modelo matemático" de la empresa (que en este caso es una matriz) en el que se debe establecer todo el conjunto de relaciones que caracterizan al funcionamiento de la misma. Esquemáticamente se puede representar del siguiente modo:



Matriz de datos
(Relaciones insumo producto)

Restricciones
(2°miembro)

La matriz contiene todos los datos del problema:

- Actividades realizables,su aporte o requerimiento a la función objetivo
- El medio en que se desarrolla la producción (restricciones)

Cada actividad corresponde a una columna (o sea Vector) de la matriz.

En programación lineal el término actividad tiene un sentido amplio y corresponde a cada uno de los procesos alternativos que se pueden efectuar en el seno de la empresa y que tenga una relación insumo-producto constante:

- Un cultivo
- Una sucesión de cultivos
- Una labor cultural
- La producción de alimentos
- La compra de insumos
- La venta de productos
- La contratación de personal, etc. etc.

* **FUENTE**: M.E. Regúnaga

La diferenciación de actividades estará ligado al tipo de análisis deseado (así por ejemplo si se quiere evaluar y programar los trabajos de la maquinaria propia, será necesario crear una serie de actividades correspondientes a cada labor, a la compra de maquinaria, etc.). Las actividades $P_i = 1, 2, 3 ....n$ deben incluirse en la matriz en forma unitaria (la elección de cada unidad depende de la practicidad y la disponibilidad de datos) cada unidad de actividad contribuye con C_i a la función objetivo (Margen, resultado, etc) y requiere y aporta aij insumos o productos.

Los coeficientes de la matriz llevan signo positivo cuando corresponden a un requerimiento y signo negativo cuando corresponden a un aporte.

Restricciones están limitadas por la disponibilidad inicial de insumos y las actividades están limitadas por la cantidad de insumos disponibles o sea por los coeficientes del 2do miembro bi de las inecuaciones o líneas de la matriz.

10.1. Análisis de Casos

10.2. Caso N° 9 - Empresa hipotética que tiene:

200	ha. de tierra
2.400	horas de trabajo al año aportadas por el productor
10.000	s/pesos para capital circulante
50	Vacas de tambo
20	Terneros para invernar
100	Novillos (no puede comprar más) para invernar por falta de reserva de forraje.
3.000	qq capacidad de almacenamiento

Las actividades que puede desarrollar son:

- Maíz por administración
- Sorgo granífero por administración
- Trigo por administración
- Maíz en aparcería
- Tambo
- Invernada de producción propia
- Invernada de novillos comprados
- También puede arrendar su campo
- O invertir su capital

Por otra parte las exigencias de la rotación le impiden efectuar más del 30% de la superficie con sorgo granífero y no está dispuesto a hacer más de 50 ha. de maíz en aparcería (por riesgo).

		Maíz	Sorgo	Trigo	Maíz Aparcería	Tambo	Invernada propia	Invernada comprada	Arrenda miento	Inversión fondos	Restriccio nes
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_0
	Unidad	Ha	Ha	Ha	Ha	Vaca	Novillo	Novillo	Ha	$	
Tierra	Ha	1	1	1	1	1	0.8	0.8	1		$\leq$ 200
Trabajo	h	10	8	5		20	5	5			$\leq$ 2.400
Capital circulante	$	125	60	40		5	10	200		1	$\leq$10.000
Capacidad almacenamiento	qq	30			30						$\leq$ 3.000
Máximo sup. de sorgo	Ha.		1								$\leq$ 60
Máximo sup. de maíz aparcería					1						$\leq$ 50
Cant.inicial vacas	cab.					1					$\leq$ 50
Cant. incial terneros	"						1				$\leq$ 20
Compra novillos	"							1			$\leq$ 100
FUNCION OBJETIVO = Z		250	200	150	100	200	180	160	50	0.1	

El Cuadro anterior reproduce los datos en una matriz. En sentido vertical se debe leer por ejemplo:

1 ha. de maíz requiere:

1 ha. de tierra
10 horas de trabajo
125 de capital circulante
30 qq de capacidad de almacenamiento

Y aporta 250 pesos de margen a la función objetivo.

En sentido horizontal se debe leer por ejemplo:

El número de hectáreas utilizadas por el maíz, más el número de hectáreas utilizadas para el sorgo, más las hectáreas de trigo, al maíz en aparcería, al tambo, a la invernada de la producción propia, a la invernada comprada y al arrendamiento no pueden ser superior a 200 ha.

En el caso de la función objetivo no hay recursos iniciales. Reemplazando la matriz por un sistema de ecuaciones, se debe expresar:

$$\text{Max } Z = \sum_{J=1}^{9} C_j X_j \quad \text{o sea:}$$

$$Z = 250\ X_1 + 200\ X_2 + 150\ X_3 + 100\ X_4 + 200\ X_5 + 180\ X_6 + 160\ X_7 + 50\ X_8 + 0.1\ X_9$$

Siendo X_1, 2 ....9 las dimensiones correspondientes a cada una de las variables (es decir los valores buscados)

Restricciones:

N°1 para la tierra:

$$1\ X_1 + 1\ X_2 + 1\ X_3 + 1\ X_4 + 1\ X_5 + 0.8\ X_6 + 0.8\ X_7 + 1\ X_8 \leq 200 \text{ ha.}$$

N°2 trabajo:

$$10\ X_1 + 8\ X_2 + 5\ X_3 + 20\ X_4 + 5\ X_6 + 5\ X_7 \leq 2.400 \text{ horas}$$

N°3 capital:

$$125\ X_1 + 60\ X_2 + 40\ X_3 + 5\ X_5 + 10\ X_6 + 200\ X_7 + 1\ X_9 \leq 10.000\ \$$$

N°4 capacidad de almacenamiento:

$$30\ X_1 + 30\ X_2 \leq 3.000 \text{ quintales}$$

N° 5 para el máximo de sorgo

$1\ X_2 \leq 60$ ha.

N° 6 para el maíz en aparcería

$1\ X_4 \leq 50$ ha.

N° 7 para la cantidad inicial de vacas

$1\ X_5 \leq 50$ cabezas

N° 8 para la cantidad inicial de terneros

$1\ X_6 \leq 20$ cabezas

N° 9 para la compra de novillos

$1\ X_7 \leq 100$ cabezas

La condición de no negatividad implica que no puede haber valores negativos de las actividades posibles, ni de los insumos.

$$X_1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ n \geq 0$$

11.2.1. Resolución

Este problema de programación lineal está resuelto por el sistema del cómputo MPS/360 de IBM.
En los siguientes cuadros que muestra la computadora se puede apreciar la solución (plan óptimo), el costo de sustitución, la cantidad de recursos utilizados, cantidad de recursos no utilizados, la actividad dual (costo de oportunidad), etc.

11.2.2. Costo de oportunidad

En el ejemplo computado:

-El trabajo
-Capacidad de almacenamiento
-Máximo de aparcería y
-Máximo de novillos

Son recursos utilizados solo parcialmente,por tanto su costo de oportunidad es cero. En cambio el resto de restricciones o recursos se han utilizado totalmente por lo que tienen un determinado valor.

Tierra = 102.94 \$/ha.

Capital = 1.18 \$/\$ y así etc. columna correspondiente.

Este es un costo de oportunidad interno o su ingreso marginal que es lo mismo. Estos miden las tensiones que se ejercen en la empresa, ya que dan una idea de la rareza relativa de los diferentes recursos.

Cuando más escaso es un recurso,mayor será su costo de oportunidad a medida que aumenta se reduce su ingreso marginal. Estrictamente se debería expresar que 102.94 \$/ha. es lo que se perdería como mínimo si se dispusiera de una unidad (1 Ha.) de tierra de menos o es lo que se ganaría como máximo si se tuviera una hectárea de tierra demás.

Los costos de oportunidad internos de la empresa pueden compararse con los precios en el mercado de factores. De este modo, si por ejemplo se puediera tomar tierra en arrendamiento a un precio inferior a la valorización interna, convendría hacerlo hasta que el costo de oportunidad interno de la tierra se reduzca igualando dicho precio.

SECTION 1 - ROWS

NUMBER	...ROW..	AT	...ACTIVITY...	SLACK ACTIVITY	--LOWER LIMIT.	..UPPER LIMIT.	.DUAL ACTIVITY
1	TIERRA	UL	200.00000	.	NONE	200.00000	102.94118-
2	TRABAJO	BS	2125.88235	274.11765	NONE	2400.00000	.
3	CAPITAL	UL	10000.00000	.	NONE	10000.00000	1.17447-
4	MAXOSILO	BS	1055.29412	1944.70588	NONE	3000.00000	.
5	MAXOSORG	UL	60.00000	.	NONE	60.00000	20.47050-
6	MAXOMOAP	BS	.	50.00000	NONE	60.00000	.
7	NOVACAS	UL	50.00000	.	NONE	50.00000	91.17847-
8	NOTERNER	UL	20.00000	.	NONE	20.00000	85.88235-
9	MAXONOV	BS	.	100.00000	NONE	100.00000	.
10	MARGENOT	PS	40217.64706	40217.64706	NONE	NONE	1.00000
	recursos		cantidad de recurso utilizada	cantidad de recurso no utilizado		restricciones de segundos miembros	costo de oportunidad

SELECTION 2 - COLUMNS

NUMBER	.COLUMN.	AT	..ACTIVITY...	..INPUT COS..	..ECWER LIMIT.	..UPPER LIMIT.	.REDUCID COST.
11	X1MAIZ	BS	35.17647	250.00000	.	NONE	.
12	X2SORGO	BS	60.00000	200.00000	.	NONE	.
13	X3TRIGO	BS	38.82353	150.00000	.	NONE	.
14	X4MAIZAP	LL	.	100.00000	.	NONE	2.94116-
15	X5TAMBO	BS	50.00000	200.00000	.	NONE	.
16	X6INVPR	BS	20.00000	180.00000	.	NONE	.
17	X7INVCOM	LL	.	160.00000	.	NONE	167.647 6-
18	X8ARREND	LL	.	50.00000	.	NONE	5 .9411 -
19	X9IFONDO	LL	.	.10000	.	NONE	1.17447-
	Actividad		solución plan óptimo	margen	límite de las actividades		costo de sustitución

11.2.3. Costo de Sustitución

Las actividades retenidas en el óptimo pagan los insumos que utilizan a sus costos de oportunidad. Es decir que el margen de dichas actividades es igual al consumo unitario de recursos multiplicado por su costo de oportunidad interno. Si verificamos en el ejemplo:

(1 Ha x 102.94 \$/Ha) + (10 h x 0 \$/h) + (125 \$ x 1.18 \$/\$) + (30qq x 0\$/qq)=

= 250 \$

El concepto de precios de oportunidad permite evaluar la posibilidad de nuevas actividades no incluídas en el programa. Solo hasta saber si pagan los recursos a sus costos de oportunidad. En el ejemplo si analizamos la posibilidad de incluir el cultivo del girasol cuyo margen es de \$ 230/Ha y requiere 1 Ha. de tierra, 7 horas de trabajo y \$ 100 de capital circulante.

(1 Ha x 102.94 \$/Ha) + (7 h x 0 \$/h) + (100 \$ x 1.18 \$/\$) = \$ 220.94

Dado que el margen del girasol es 230 \$/ha. dicho cultivo es una actividad "interesante", ya que paga los recursos que utiliza a un precio mayor - que el costo de oportunidad de los mismos para la solución óptima (toda actividad que no paga los recursos a su costo de oportunidad no puede entrar en la solución).

11.3. Caso N° 10 (Agroindustria)

Programa óptimo de producción de alimentos con datos de compra de insumos, reducción en los distintos procesos y venta de la capacidad ociosa.

11.3.1. Datos

Una empresa agroindustrial que produce alimentos para ganado, debe preparar 2 alimentos A y B que cumplan determinadas restricciones respecto a dos nutrientes 1 y 2. Para formar los alimentos A y B puede comprar: pasto fresco avena y cebada a los siguientes precios en \$/kg. 3; 15 y 17 respectivamente.
El precio de venta es de \$120 \$/kg. para A y \$ 100 \$/kg. para B.

1 kg. de A debe tener:

Exactamente 200 unidades de nutriente 1
Y por lo menos 20 " " " 2

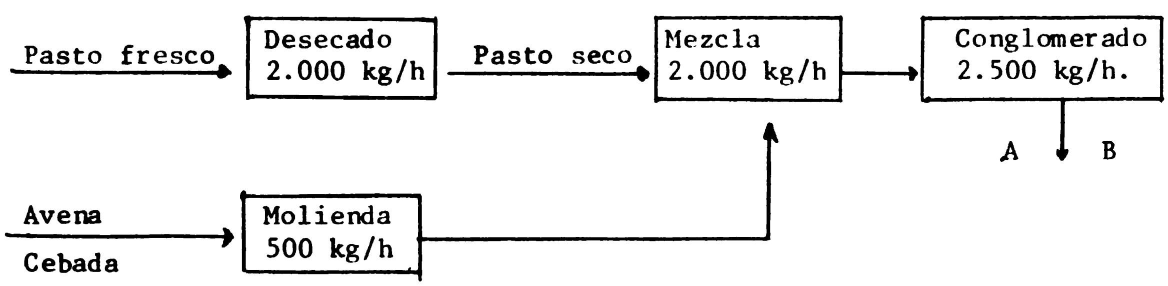
1 kg. de B debe tener:

A lo sumo 500 unidades de nutriente 1
Y entre 40 y 60 " " " 2

El siguiente cuadro indica las unidades de nutrientes 1 y 2 por kg. de pasto seco, avena y cebada.

	NUTRIENTES	
	1	2
Pasto seco	500	70
Avena	200	20
Cebada	150	18

El esquema del proceso y la capacidad de los equipos que intervienen son:



En el proceso de secado el pasto pierde el 45% de su peso. En el proceso de molienda el 3% se transforma en desperdicio que se vende a \$ 1 por kg.

Cada equipo (desecado, molienda, mezcla y conglomerado) pueden trabajar a lo sumo 8 horas diarias. Las horas sobrantes de desecado se venden a -- \$ 5.000 \$/horas. El conglomerado final se forma agregando un 10% de agua.

Se pregunta; definir el programa diario que maximice el beneficio total.

11.3.2. Planteo

Identificación de vatiables:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Pasto seco}\\ \text{Avena}\\ \text{Cebada}\end{array}\right. \quad \text{para formar} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{alimento A}\\ \text{ó}\\ \text{alimento B}\end{array}\right.$$

Las variables son:

PFA:	Pasto	fresco	para	alimento	A
PFB:	"	"	"	"	B
AA :	Avena		"	"	A
AB :	Avena		"	"	B
CA :	Cebada		"	"	A
CB :	"		"	"	B

11.3.3. Función objetivo

Se conoce los precios de venta que son:

Alimento A:	\$ 120	por kg.
" B:	\$ 100	" "

Los precios de compra de los distintos insumos son:

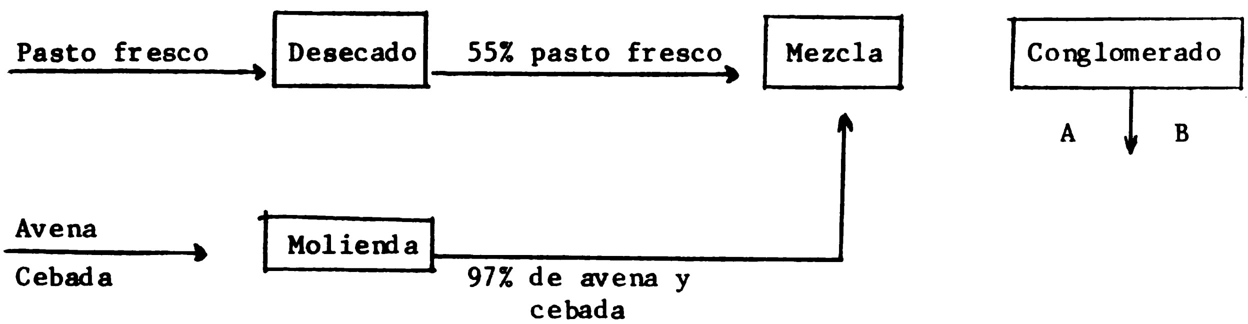
Pasto fresco	\$ 3	por kg.
Avena	\$ 15	" "
Cebada	\$ 17	" "

Además tenemos datos de la venta de los sobrantes:

En el proceso de molienda se pierde 3% que se vende a \$ 1 por kg.
Las horas sobrantes de desecado se venden a \$ 5.000 por hora.

Vamos a maximizar = venta - compra + venta de capacidad ociosa.

Por tanto el esquema del proceso quedaría con los datos de las pérdidas:



Venta.- La venta expresada con todas las variables planteadas y teniendo en cuenta las reducciones de los distintos insumos resulta:

$$120 \underbrace{\left[\frac{55}{100} \text{ PFB} + \frac{97}{100} (\text{AA} + \text{CA}) \right]}_{\text{Alimento A}} + 100 \underbrace{\left[\frac{55}{100} \text{ PFB} + 97 \; (\text{AB CB}) \right]}_{\text{Alimento B}}$$

Ya que el conglomerado final se forma agregando un 10% de agua y efectuando las operaciones correspondientes resulta:

$$72.6 \text{ PFA} + 128.04 \text{ AA} + 128.04 \text{ CA} + 60.5 \text{ PFB} + 106.7 \text{ AB} + 106.7 \text{ CB}$$

Compra.- Expresamos los datos de compra en las 6 variables definidas y tenemos:

$$3 \text{ PFA} + 3 \text{ PFB} + 15 \text{ AA} + 15 \text{ AB} + 17 \text{ CA} + 17 \text{ CB}$$

Venta de capacidad ociosa:

En el proceso de molienda se pierde 3% que se vende a \$ 1 el kg.. En este proceso intervienen la avena (AA y AB) y cebada (CA y CE)

$$\$\, 1 \; \frac{3}{100} \; (\text{AA} + \text{AB} + \text{CA} + \text{CB})$$

Se reduce a 0.03 AA + 0.03 AB + 0.03 CA + 0.03 CB

Las horas sobrantes de desecado se venden a \$ 5.000 la hora. Además sabemos que el equipo de desecado trabaja a lo sumo 8 horas diarias.
En este proceso interviene el pasto seco simbolizado como PFA (para alimento A) y PFB (para alimento B).

Por tanto: $5.000 \left[8 - \frac{1}{2.000} (PFA + PFB) \right]$ realizando operaciones:

$$40.000 - 2.5\ PFA - 2.5\ PFB$$

Reemplazamos para armar la función objetivo que expresamos como:

Max = venta - compra + venta de capacidad ociosa.

Venta

72.6 PFA + 128.04 AA + 128.04 CA + 60.5 PFB + 106.7 AB + 106.7 CB -

Compra

3 PFA - 3 PFB - 15 AA - 15 AB - 17 CA - 17 CB +

Venta de capacidad ociosa

0.03 AA + 0.03 AB + 0.03 CA + 0.03 CB + 40.000 - 2.5 PFA - 2.5 PFB

Efectuando sumas y restas:

Max Z = 67.1 PFA + 113.07 AA + 111.07 CA + 55 PFB + 91.73 AB + 89.73 CB + 40.000

11.3.4. Restricciones

Tenemos en la composición de alimentos:

Para alimento A

Nutriente 1

1 kg. de A debe tener exactamente 200 unidades de nutriente 1, el = implica una restricción del tipo "igual estricto".
El nutriente 1 está compuesto por 500 kg. de pasto seco, 200 kg. de avena y 150 kg. de cebada.

Además por el cuadro que dibujamos al plantear la función objetivo sabemos que se aprovecha el 55% de paso fresco y 97% de avena y cebada.

$$500\left(\frac{55}{100}\right) PFA + 200\left(\frac{97}{100}\right) AA + 150\ (CA) = 200 \qquad \boxed{\text{Rest. N° 1}}$$

Nutriente 2

Para 1 kg. de alimento A debemos tener por lo menos 20 unidades de nutriente 2 = restricción del tipo mayor o igual.
El nutriente 2 está compuesto por 70 kg. de pasto seco, 20 kg. de avena y 18 kg. de cebada.
Las pérdidas de pasto fresco, avena y cebada son las ya mencionadas.

$$70\left(\frac{55}{100}\right) PFA + 20\left(\frac{97}{100}\right) AA + 18\left(\frac{97}{100}\right) CA \geq 20 \qquad \boxed{\text{Rest. N° 2}}$$

Para alimento B

Nutriente 1

1 kg. de B debe tener a lo sumo 500 unidades de nutriente 1 = restricción de tipo menor o igual.
Los coeficientes composición del nutriente 1 y los desperdicios son lo ya expresados.

$$500\left(\frac{55}{100}\right) PFB + 200\left(\frac{97}{100}\right) AB + 150\left(\frac{97}{100}\right) CB \leq 500 \qquad \boxed{\text{Rest. N° 3}}$$

Nutriente 2

1 kg. de B debe tener entre 40 y 60 unidades de nutriente 2. La composición de este nutriente es de 70 kg. de pasto seco, 20 kg. de avena y 18 kg. de cebada. Se pierde 45% del pasto fresco y el 3% de avena y cebada.

$$40 \leq 70\left(\frac{55}{100}\right) PFB + 20\left(\frac{97}{100}\right) AB + 18\left(\frac{97}{100}\right) CB \leq 60 \qquad \boxed{\text{Rest. N°4}}$$

Ahora tratamos las restricciones de los equipos:

Desecado

Puede trabajar a lo sumo 8 horas diarias (restricción del tipo $\leq$) y dese ca 2.000 kg. de pasto fresco por hora.

$$\frac{1}{2.000} (PFA + PFB) \leq 8 \qquad \boxed{\text{Rest. N°5}}$$

Molienda

Puede trabajar a lo sumo 8 horas diarias (tipo $\leq$) y muele 500 kg. de ave na y cebada por hora.

$$\frac{1}{500} (AA + AB + CA + CB) \leq 8 \qquad \boxed{\text{Rest. N°6}}$$

Mezcla

El equipo mezcla 2.000 kg. de pasto seco, avena y cebada por hora pero no el 100 % de cada uno, sino el 55% de pasto seco y el 97% de avena y cebada trabaja a lo sumo 8 horas diarias.

$$\frac{1}{2.000}\left[\frac{55}{100} (PFA + PFB) + \frac{97}{100} (AA + AB + CA + CB)\right] \leq 8 \qquad \boxed{\text{Rest. N° 7}}$$

Conglomerado final

Como todos los equipos trabajan como máximo 8 horas diarias (tipo $\leq$). Aquí se reunen el 55% de pasto fresco y el 87% de avena y cebada en 2.500 kg por hora y se le agrega además 10% de agua.

$$\frac{1}{2.500}\left\{\frac{100}{100}\left[\frac{55}{100} (PFA + PFB) + \frac{97}{100} (AA + AB + CA + CB)\right]\right\} \leq 8 \qquad \boxed{\text{Rest. N° 8}}$$

Hasta aquí hemos planteado el problema

11.3.5. Solución por computadora. Podemos anotar lo siguiente

Variables:

PFA	: Pasto	fresco	para	alimento	A
PFB	: "	"	"	"	B
AA	: Avena		"	"	A
AB	: "		"	"	B
CA	: Cebada		"	"	A
CB	: "		"	"	B

<u>Función objetivo:</u>

Max Z = 61.7 PFA + 113.07 AA + 111.07 CA + 55 PFB + 91.73 AB + 89.73 CB + 40.000

Cuando además de las variables en la función objetivo tenemos un término independiente (40.000), se procede a ignorarlo para hallar la solución. En efecto, siendo una constante no tiene sentido maximizarla. Al reemplazar los valores del programa óptimo se tomará en cuenta para averiguar el beneficio máximo total.

<u>Restricciones:</u>

N°

1: 27.5PFA + 194 AA + 150 CA = 200

2: 38.5 PFA + 19.4 AA + 17.46 CA ≤ 20

3: 275 PFB + 194 AB + 145.5 CB ≤ 500

4: 38.5 PFB + 19.4 AB + 17.46 CB ≤ 60

5: 38.5 PFB + 19.4 AB + 17.46 CB ≥ 40

6: 0.0005 PFA + 0.0005 PFB ≤ 8

7: 0.002 AA + 0.002 AB + 0.002 CA + 0.002 CB ≤ 8

8: 0.000275PFA+0.000275PFB+0.000485AA+0.000485AB+0.0000.485(A+0.000485CB ≤ 8

9: 0.000242PFA+0.000242PFB+0.0004268AA+0.0004268AB+0.0004268CA+0.0004268CB ≤ 8

11.3.6. <u>Programa óptimo</u>

1.30 unidades de cebada para A

3.43 " " " " B

Con un beneficio máximo total de 111.07(1.3) + 89.73(3.43)+ 40.000 = 40.452.16$

Utilización de restricciones

N°

1: Está totalmente utilizada, ya que 1 kg. de A debía tener exactamente 200 unidades de nutriente 1.

2: Se cumple 1 kg. de alimento A, debía tener por lo menos 20 unidades de nutriente 2. La solución tiene 23 unidades.

3: Existe solamente una unidad ociosa de nutriente 1 para alimento B.

4: Está agotada. Se utilizan las 60 unidades de nutriente 2 para alimento B.

5: Se cumple. Las unidades de nutriente 2 para 1 kg. de alimento B debía ser mayor a 40. La solución tiene 60 unidades (exceso de 20 unidades).

6: Existen 8 horas diarias ociosas en el proceso de desecado de pasto fresco pués no están en la solución.

7: Existen 7 horas ociosas en molienda

8: " 7 " " " el equipo de mezcla

9: " 7 " " " conglomerado final

12. Análisis de la estabilidad de una solución de programación lineal

Uno de los supuestos de programación lineal es el de la certeza de los datos, es decir se supone que las hipótesis de precios y rendimientos efectuadas se cumpliran en la realidad. Este supuesto tiene algunas limitaciones debidas a las aleatoridades del clima y de los mercados a que están sujetas las empresas agropecuarias. Por este motivo, los planes o soluciones obtenidas - deben ser estables, es decir poco sensibles a variaciones en los datos. La - estabilidad de una solución óptima es uno de los aspectos más importantes en el análisis de un resultado.

El análisis de la estabilidad de una solución puede efectuarse fundamentalmente por tres vías:

- El análisis de los costos de sustitución
- Mediante cálculos adicionales que puede realizar la computadora
- Parametraje.

12.1. Análisis de costos de sustitución

Los costos de sustitución de las actividades no retenidas en el óptimo permiten efectuar un primer análisis de la estabilidad de la solución. Las actividades retenidas en el óptimo son "interesantes" porque son las que mejor va

lorizan los recursos, es decir que permiten el mejor uso de los recursos en función del objetivo.

En cambio las actividades no elegidas no pagan los recursos a sus costos de oportunidad y los costos de sustitución miden la pérdida que ocasionaría la introducción en el plan de producción de una unidad de dichas actividades; estos son valores equivalentes al monto en que deberían aumentar los margenes unitarios de las mismas para entrar en la solución. De acuerdo a esto, hay actividades que son candidatas a entrar en la solución con una ligera modificación en las condiciones originales (precios rendimientos) mientras que otras estarán muy distantes de serlo. En el caso N°9 del ejemplo , el maíz en aparcería es una actividad que está muy cerca del límite (su costo de introducción es muy bajo, casi cero). En cambio la invernada comprada dificilmente entraría en la solución ya que para hacerlo debería casi duplicar su margen.

Toda solución que presente muchas actividades no retenidas con bajos - costos de sustitución, especialmente si dichas actividades son muy diferentes a las del plan óptimo, es una solución poco estable y no tan segura.

12.2 Cálculos adicionales efectuados por la computadora

Uno de estos es determinar los rangos o límites dentro de los cuales pueden variar los margenes de cada una de las actividades sin que se modifique el plan de producción. Es decir que se obtiene la información acerca de los límites máximo y mínimo de los márgenes de las actividades entre los que se mantiene la misma solución.

Como información adicional se indica la actividad que reemplazaría a la actividad que se está analizando en caso de disminuir el margen de la misma por debajo del límite inferior, o la actividad a la que desplazaría de la solución en caso de que aumente su margen por encima del límite superior.

Es importante destacar que esta información es válida para condiciones que el rango de una actividad supone que todas las demás no se modifican. Por consiguiente no se puede decir que una solución es válida dentro de - los límites dados de la actividad A y además dentro de los límites de otra actividad B.

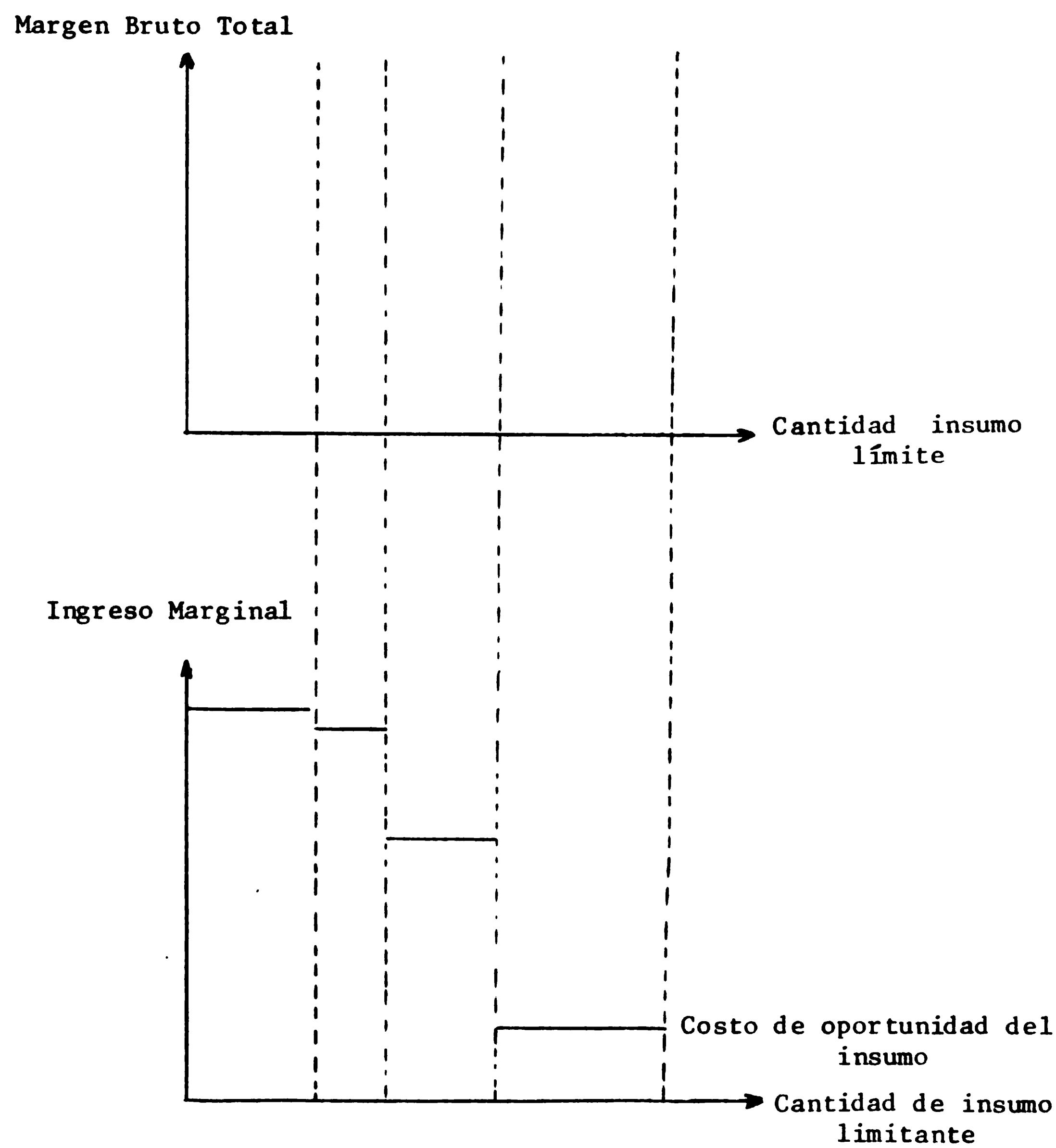
Solo se puede afirmar que es válida entre los límites calculados para A, - mientras B y todas las demás actividades no se modifiquen.

12.3. Parametraje

Consiste en hacer variar en forma constante los coeficientes de la función objetivo y/o los coeficientes del 2do miembro de las restricciones, para analizar como varían los resultados.

Mediante la variación de los coeficientes de la función objetivo (márgenes unitarios de las actividades) se puede analizar como cambian los planes de producción óptimos ante modificaciones en los rendimientos o precios relativos de los diferentes productos.

La técnica del Parametraje del coeficiente del 2do miembro de una restricción consiste en hacer variar en forma contínua la disponibilidad de un recurso limitante, para analizar como varía el margen total. De este modo - se puede obtener la curva correspondiente a la variación de la función económica en relación al factor dado (estrictamente no se obtiene una curva, sino una sucesión de segmentos de recta) como se aprecia en la siguiente - figura:



Cada punto de la curva corresponde a una infraestructura determinada. La pendiente en cada punto es el costo de oportunidad, o sea la productividad marginal (valorizada) del factor. Cuando se aumentan las disponibilidades de un recurso se hace cada vez menos escaso, por lo que dicho recurso deja de ser limitante.

La programación lineal permite calcular el plan óptimo en relación a una infraestructura dada cambiará el plan. Por ello es conveniente analizar mediante el parametraje lo que permiten si se modifican las condiciones originales de la infraestructura de producción.

13. Matrices *

13.1. Utilización del suelo

Es una restricción importante en el sector agropecuario. Esta restricción debe asegurar:

- Que la superficie requerida no supere a la disponible.
- Que la combinación se efectúe de acuerdo a los requerimientos de tierra por los cultivos en las diferentes épocas del año.

* FUENTE: Franck G.

Es conveniente formular varias restricciones con respecto al uso de la tierra, cada una correspondiente a un período del año. La única condición es que permitan representar adecuadamente el uso de la tierra por parte de las actividades. Supongamos:

Uso de la tierra:	Trigo	de Mayo a Diciembre
	Cebada	" " " "
	Girasol	de Agosto a Mayo
	Maíz	" " " "
	Sorgo granífero	" " " "

Se debe tomar en cuenta que las actividades comienzan con las primeras labranzas (barbecho) si formulamos en una matriz:

Uso del suelo por cultivos/unidad Ha.

Z	Trigo C_1	Cebada C_2	Girasol C_3	Maíz C_4	Sorgo C_5	Po
Junio a Diciembre	1	1				$\leq b_1$
Agosto a Mayo			1	1	1	$\leq b_2$

El trigo compite con la cebada y el girasol con maíz y sorgo por la tierra. Es factible construir un modelo aceptable recurriendo a tres o cuatro períodos de uso de suelos. Es conveniente tener presente que tanto restricciones como - actividades se deben reducir al mínimo indispensable evitando la formulación de matrices exageradamente grandes que encarecen la computación.

13.2. <u>Rotaciones</u>

Se interpretará como ciertos límites máximos que no se pueden sobrepasar como por ejemplo la superficie máxima o el porcentaje máximo de superficies de - determinados cultivos, cuya superación podría acarrear erosión del suelo o agotamiento.

Ejemplo: Si una empresa efectúa las actividades de cebolla, maíz y soja, por razones de mercado y técnicas, la cebolla no debe sobrepasar de 20% dc la superficie; el maíz no debe superar el 40% y ambas no deben exceder de 70% de la superficie. Se sabe además que la superficie del campo que mantiene la empresa es de 3.000 Ha.

Máximos de Rotación (Unidades Ha.)

Z	Cebolla P_1	Maíz P_2	Soja P_3	Po
	C_1	C_2	C_3	
Tierra	1	1	1	$\leq$ 3.000
Máximo de cebolla 30%	1			$\leq$ 900
Máximo de maíz 25%				$\leq$ 750
Máximo de Soja 50%				$\leq$ 1.500

Formulación de máximos relativos (Von Urff). Suponiendo que la cebolla no debe superar el 30% de la superficie cultivada se tiene $X_1 < 0.30$. Como las restantes actividades que requieren tierra son: P_2 y P_3 el requerimeinto total ser:

$$X_1 + X_2 + X_3 = T$$

Entonces:

$$X_1 \leq 0.3 \quad (X_1 + X_2 + X_3)$$

Combinando los términos al 1er miembro:

$$0.7 X_1 - 0.3 X_2 - 0.3 X_3 \leq 0$$

Formulamos el máximo relativo de cebolla y tenemos:

(Unidad Has.)

	Cebolla P_1	Maíz P_2	Soja P_3	Po
Z	C_1	C_2	C_3	
Tierra	1	1	1	$\leq$ 3.000
Máximo cebolla	0.7	-0.3	-0.3	$\leq$ 0

Las actividades Maíz (P_2) y Soja (P_3) aportan el permiso de siembra para cebolla. Por cada hectárea cultivada con Maíz y Soja se puede sembrar 0.3 de cebolla y como esta también aporta 0.3 a la superficie a cultivar, pero a su vez requiere 1 ha., es decir que la diferencia entre aporte y requerimiento es 0.7 ha. que es el coeficiente que figura en la actividad. Como regla de ayuda para formular correctamente el permiso, que la actividad que concede el permiso está aportando permiso (por consiguiente el signo del coeficiente es negativo) a la que necesita del mismo (el coeficiente insumo producto de un requerimiento es positivo).

Retomando la rotación, ésta no solo se puede asegurar mediante la restricción de máximos; también se puede obtener formulando rotaciones o microrotaciones (partes de una rotación) como actividades especialmente cuando se debe tener presente el supuesto de la actividad.

13.3. Calidad del suelo

Esta no es homogenea existiendo diferentes clases de suelo y que se manifiestan en diferente rendimiento o restricciones de uso del suelo, etc.

13.4. Capacidad de uso

Las limitaciones con miras a la conservación adecuada pero sin que las distintas clases impliquen diferentes rendimientos.

Ejemplo: se tiene 3 clases de suelos y cada una admite como máximo la cantidad de años de cultivos anuales, a los cuales debe seguir indefectiblemente una pradera.

Clase I	(8 años)
Clase II	(6 años)
Clase III	(4 años)

O sea que un suelo de clase I tendría una rotación de 13 años de los cuales 8 sean agricultura y 5 con praderas, etc. Si la superficie a rotar es 350 ha. de las cuales 110 has. son de clase I; 85 de clase II y el resto de clase III; por tanto la superficie anual que puede dedicar a cultivos será:

Suelo	Superficie Ha.	Rotación	Superficie a cultivos agrícolas. Ha.
Clase I	110	8/13	67.69
Clase II	85	6/11	46.36
Clase III	155	4/9	68.89
		Cultivos anuales	182.94

Al originar distintos rendimientos en un mismo cultivo, es necesario introducir restricciones por cada tipo de suelo, así también para cada cultivo sembrado en distintos suelos.

Ejemplo: si tenemos 3 calidades diferentes de suelos A, B y C, pudiéndose cultivar cebolla en los suelos de calidad A y B, maíz en A, B y C y soja en B y C:

Calidades de suelos
(Unidad Ha.)

	Cebolla		Maíz			Soja		
	A	B	A	B	C	A	B	
Z	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	Po
Suelo A	1		1					$\leq b_1$
Suelo B		1		1		1		$\leq b_2$
Suelo C					1		1	$\leq b_3$

Por ejemplo la actividad cebolla se puede cultivar en suelos calidad A ó en la B; necesariamente se deberán formular como dos actividades separadas de acuerdo con la regla que dice que actividades que requieran de cierto insumo o de otro, o no requieran ese insumo deben tratarse como actividades separadas. Esto trae como consecuencia el aumento del tamaño de la matriz.

Sin embargo si no difieren para un mismo cultivo los respectivos valores C_j; se puede recurrir a un artificio para reducir las actividades y constituye en usar máximos para cada cultivo con la calidad de suelo que requieran juntamente con restricciones adicionales que contemplan la competencia de los cultivos por suelos de la misma calidad. Ejemplo:

Calidad del Suelo	Cebolla	Maíz	Soja	Superficie
A	si	si	no	67.69
B	si	si	si	46.36
C	no	si	si	68.89
Máximos	114.05	182.94	115.25	

Para cebolla la superficie máxima que se puede cultivar es 67.69 Has. suelo A + 46.36 Ha. suelo B = 114.05 Ha.

Diferentes calidades de suelo con C_j igual
(Unidad Ha.)

	Cebolla P_1	Maíz P_2	Soja P_3	
Z	C_1	C_2	C_3	Po
Máximo cebolla	1			$\leq$ 114.05
" maíz	1	1	1	$\leq$ 182.94
" soja			1	$\leq$ 115.25

En la matriz la cebolla reduce la posibilidad de cultivar maíz en calidades de suelo A y B, desplazándolo al C. Por la primera restricción la cebolla no puede sobrepasar las 114.05 ha. si en la solución entran 114.05 ha. Esta superficie también es requerida en la segunda restricción quedando en esta 68.89 ha. que es la tierra C. Si el maíz también entra en la solución pero después de la cebolla de acuerdo con su C_j puede cultivarse en estas 68.89 ha.

La cebolla ha desplazado al maíz al suelo C, dado que la restricción de máximo del maíz es menos limitativa que la cebolla porque el maíz puede cultivarse en otras tierras en las cuales no es posible el cultivo de cebolla, este requiere de la restricción de máximo del maíz y no al revés.

Resumiendo, en este caso particular de diferentes calidades de suelo, aplicable solo cuando C_j (función objetivo) no varía el valor al modificarse la calidad del suelo. Se tomarán entonces restricciones de máximo, formular la diagonal de máximos y donde hay competencia por la calidad del suelo la actividad más fuertemente restringida requerirá del máximo de la o las competidoras menos restringidas.

13.5. Mano de obra

La mano de obra no solo origina restricciones cuantitativas, sino que frecuentemente también puede ser de orden cualitativo.

Las restricciones se formulan por períodos (meses, quincenas, semanas, etc) y los períodos no necesitan ser uniformes y no podrían cubrir la totalidad del año, sino solo aquellos períodos en que el trabajo puede ser restrictivo omitiéndose aquellos períodos en los que no lo es.

Por otro lado en la empresa agropecuaria hay trabajos periódicos y transferibles. El primero son aquellos que deben ejecutarse en cierta época del año (cosecha, siembra, etc.) y los segundos o transferibles son los que se pueden desarrollar dentro del año pero en cualquier época, es decir se pueden transferir a aquellos períodos en los cuales no hay trabajos urgentes.

En los modelos de programación lineal se debe introducir en la matriz aparte de las restricciones de mano de obra correspondientes a las épocas críticas, una restricción referente a la disponibilidad anual de mano de obra con el fin de evitar que las necesidades totales de trabajo superen a las disponibilidades totales de este insumo.

Si suponemos una explotación cuyas alternativas serían las siguientes: maíz, soja, cerdos y miel, los períodos de trabajo para el maíz requiere a_{11} de trabajo en primavera (labranza, siembra, cuidados culturales) y a_{31} en otoño (cosecha). La soja requiere las cantidades de a_{12}; a_{22} y a_{32} en primavera-verano y otoño respectivamente. Los cerdos requieren cantidades de trabajo más o menos iguales durante todo el año a_{13} ; a_{23} ; a_{33} y a_{43} y además cierta cantidad de mano de obra de mantenimiento de las mejoras que se puede realizar dentro de cualquier época pero necesariamente dentro del año. Y la producción de miel requiere trabajo en verano y otoño (a_{24} ; a_{34}) para la atención de los colmenares y la extracción de la miel, como también una cantidad de horas para limpieza y reparación de los cajones vacíos, marcos, etc. que se pueden ejecutar en cualquier momento.

Formulación de trabajos periódicos

Z	Maíz P_1	Soja P_2	Cerdos P_3	Miel P_4		Po
	C_1	C_2	C_3	C_4		
Primavera	a_{11}	a_{12}	a_{13}		$\leq$	600
Verano		a_{22}	a_{23}	a_{24}	$\leq$	700
Otoño	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	$\leq$	600
Invierno			a_{43}		$\leq$	500
Total anual	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	$\leq$	2.400

Po es igual a la cantidad anual de mano de obra que es la suma de la mano de obra disponible en cada estación. La restricción evita que todos los trabajos tanto periódicos como transferibles excedan esta disponibilidad, aunque los transferibles no se hallen incluídos dentro de las necesidades estacionales.

13.6. Horas extras

Es el trabajo adicional que podría necesitar el productor en períodos pico de trabajo. Por tanto al personal asalariado deberá pagarse un sobresueldo por este concepto (generalmente este es superior al salario normal, medido en la misma unidad de tiempo).

El planteamiento del programa se toma como una actividad en la cual el valor de la función objetivo es el costo directo. La cantidad de horas son un aporte a la restricción trabajo. Generalmente las horas extras se suelen limitar con un máximo, dado que lógicamente no pueden superar cierto volumen.

Ejemplo: si una empresa tiene que realizar las siguientes actividades: P_1; P_2; P_3 y le adicionamos P_4 (horas extras):

Horas extras

Z	Actividades P_1 C_1	P_2 C_2	P_3 C_3	Horas extras P_4 $- C_4$	Po
Tierra	a_{11}	a_{12}	a_{13}		b_1
Trabajo	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2
Capital circulante	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3
Máximo horas extras				a_{44}	b_4

Como C_4 es costo directo lleva signo negativo. Además C_4 representa el ingreso mínimo que pretende la empresa por las horas extras que podría ocupar.

13.7. Mano de obra eventual (adicional)

Esta se puede tratar como una actividad adicional igual como en el caso anterior. Los coeficientes insumo producto dependerán de las unidades empleadas. La unidad de esta actividad será preferentemente la hora o el día de trabajo.

Otra forma sería recurrir a modificar las coeficientes b . Se calcula un plan con una matriz en cuyo segundo miembro se ha consignado el trabajo disponible, luego se incrementa esta cifra sumándole el trabajo que aporta el jornal adicional y se vuelve a computar la matriz obteniéndose un segundo plan con su correspondiente resultado, así se lo compara con el primer plan.

13.8. Maquinaria y Mejoras

Aquí es aplicable todo lo referente a disponibilidad a través del tiempo, diferencias de calidad, contratación o adquisición de maquinarias, adicional, etc. La formulación sería similar a lo ya anotado.

Las mejoras pueden ser praderas, galpones en explotaciones avícolas, invernáculos para floricultores, etc.

Las limitaciones en maquinaria podrían ser horas tractor, implemento, otro tipo de máquina, etc. o la capacidad de trabajo de ciertas máquinas, especialmente aquellas de empleo muy estacional (cosechadoras, secadoras, etc.)

13.9. Forrajes

La producción de forrajes es conveniente subdividirla por estaciones (cuatro períodos), a fin de tomar en cuenta la productividad de pasturas y verdeos durante las estaciones del año.

Si suponemos que las disponibilidades de forrajes b_4; b_5; b_6 y b_7 provienen de praderas existentes (razones técnicas de rotación deben mantener una superficie con praderas). Es muy frecuente que todo el forraje (incluso praderas) provenga de actividades expresamente incluídas en el modelo (P_1; P_2 y P_3) en cuyo caso el respectivo coeficiente es cero. En el presente modelo se han formulado dos actividades productoras de forraje (verdeos de verano y verdeos de invierno) que requieren tierra, trabajo y capital y a su vez - aportan forraje durante sus respectivas épocas de producción. La actividad fardos requiere trabajo y capital, pero no tierra, puesto que los fardos se producirán sobre praderas existentes a los verdeos que entren en la solución.

Requiere forraje en primavera (a_{73}) y los fardos se hallan disponibles - para el consumo en el invierno siguiente ($-a_{63}$). Tanto los fardos como los verdeos ocasionan costos directos ($-C_j$).

Consumidoras de forrajes son dos invernadas diferentes (diferencias que se pueden dar en función de su intensidad en función de su época de compra y venta de ganado). Cría y tambo; estas actividades no requieren tierra, para poder efectuarlas se necesita forraje, proveniente de praderas, verdeos o fardos; es decir que algunas de estas actividades entrarán en la solución (o ya lo están implícitadas como las praderas introducidas a priori) y a su vez requerirán tierra.

Forrajes

	Verdeos		Fardos	Invernada		Cría	Tambo	Po
	Verano P_1	Invierno P_2	P_3	A P_4	B P_5	P_6	P_7	
Z	$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	C_4	C_5	C_6	C_7	
Tierra	a_{11}	a_{12}						$\leq b_1$
Trabajo	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	$\leq b_2$
Capital	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	$\leq b_3$
Forrajes:								
Verano	$-a_{41}$			a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	$\leq b_4$
Otoño	$-a_{51}$			a_{54}	a_{55}	a_{56}	a_{57}	$\leq b_5$
Invierno		$-a_{62}$	$-a_{63}$	a_{64}	a_{65}	a_{66}	a_{67}	$\leq b_6$
Primavera		$-a_{72}$	a_{73}	a_{74}	a_{75}	a_{76}	a_{77}	$\leq b_7$

13.10. Agregación y desagregación de Actividades

Desagregar consiste en subdividirla en varias partes y tratar cada una de ellas como una actividad separada. Al descomponerle en sus partes cada una se formula con varios proceso alternativos y se está evaluando por separado. Al desagregar se somete a la evaluación económica las alternativas para hallar la más conveniente.

Una desagregación muy simple consiste en separar la venta del producto - del resto de la actividad, esto es parcialmente útil cuando un producto tiene usos alternativos.

Ejemplo: cuando un ternero producido por la actividad cría se puede vender o se puede recriar,en lugar de formular dos actividades (cría con venta del ternero y cría con recría) se desagrega en 3 actividades:

- Cría que comprende todo el proceso hasta la obtención del ternero
- Venta del ternero
- Recría

Se trata de una empresa de 1.000 Has. con 800 Has. de praderas naturales y 200 Has. aptas para cultivos anuales (soja, trigo, verdeos).La receptibilidad de las praderas es de 1 vaca por Ha. y de 3.3 terneros de recría/Ha. Las vacas requieren además verdeos a razón de 0.1 Ha. verdeo/vaca; los terneros en recría 0.2 Ha. verdeo/ternero.

Para cultivar una Ha. de verdeo se requieren 2.7 horas de trabajo en Otoño. Los restantes insumos de trabajo en otoño son 1.3 h/vaca para cría, 0.1 h/ternero cuando éstos se venden y 0.8 h/ternero cuando se recrían. El porcentaje de parición es del 75% quedando para la venta o recría una vez retenida las hembras para reposición de vacas viejas un 50% de terneros/as. Las restantes actividades son ovinos, soja y trigo que permanecen inalteradas en ambos modelos y cuyos datos se pueden ver directamente en las matrices - que se presentan:

MODELOS

	DESAGREGADO			AGREGADO	
INSUMO/FUNC.OBJ.	CRIA	VENTA TERNEROS	RECRIA	CRIA CON VENTA TERNEROS	CRIA CON RECRIA
Tierra para cultivos				Verdeo: 0.1 ha/ternero	Verdeo cría 0.1 ha/vaca " " 0.5 tern/ Vaca x 0.2 ha/tern. 0.1 0.2 ha.vaca
Pradera natural	1 vaca/ha.		0.3 ha/tern.	1 ha/vaca	Pradera cría 1.00 ha.vaca " recría 0.5tern/ Vaca x 0.3 ha/tern. 0.15 1.15 " "
Trabajo otoño	1.3 h/vaca	0.1 h/tern.	0.8 h/tern.	Cría 1.30 h/vaca Venta 0.1 h/ Tern. x 0.5 tern./vaca 0.5 " " Verdeo 2.7 h/ha x 0.1 ha/vaca 0.27 " " 1.62 " "	Cría 1.30 h/vaca Recría 0.8 h/tern. x 0.5 tern./vaca 0.40 " " Verdeo cría 0.27 " " Verdeo recría 2.7 h/ ha x 0.2 ha/tern. x 0.5 tern./vaca 0.27 " " 2.24
Costo Directo	5 $/vaca			Cría 5 $/vaca Verdeo 50$/ ha x 0.1 ha/ vaca 5 $/ " 10 " "	Cría 5 $/vaca Verdeo cría 5 $/ " Verdeo recría 50 $/ ha x 0.2 ha/tern. x 0.5 tern/vaca 5 $/ " 15
Ingreso		200 $/tern.	300 $/tern.	200 $/tern x 0.5 tern/ vaca 100 $/vaca	300 $/tern. x 0.5 tern/vaca 150 $/vaca

13.10.1. Modelo agregado

Se presenta en el siguiente cuadro con 5 actividades y 3 restricciones: tierra apta para cultivos, praderas naturales y trabajo otoño. Para tener en cuenta la alternativa entre venta y recría fue necesario formular dos actividades:

- Cría con venta del ternero y
- Cría con recría

Los coeficientes insumo producto se tuvieron que calcular previamente partiendo de los datos proporcionados, cuyo detalle se puede observar en el siguiente cuadro. Obsérvese que para obtener estos coeficientes fueron necesarios ciertos cálculos previos, lo que no se requiere en el modelo desagregado.

	Unidades	Cría con venta de ternero P_1	Cría con recría P_2	Ovino P_3	Soja P_4	Trigo P_5	Po
Unidades		Vaca	Vaca	Oveja	Ha.	Ha.	
Z		90	135	15	250	200	
Tierra para cultivos	Ha.	0.1	0.2		1	1	$\leq$ 200
Praderas naturales	Ha.	1	1.15	0.2			$\leq$ 800
Trabajo otoño	Hr.	1.62	2.24	0.3	3	2.5	$\leq$1.200

Solución: M B T : 81.098

Plan óptimo		Recursos no utilizados	
P_2 cría c/recría	336 vacas	Praderas naturales	379 Ha.
P_4 soja	127 Ha.		

Costo de Sustitución		Costo de oportunidad	
P_1 cría c/venta tern.	3 $/vaca	Tierra para cultivos	95 $/Ha.
P_3 ovinos	1 $/oveja	Trabajo otoño	52 $/Hr.
P_5 trigo	24 $/Ha.		

13.10.2. Modelo desagregado

Se tuvo que añadir dos nuevas restricciones: verdeo y terneros. El cultivo verdeo se separó de la cría, formulándose como actividad aparte, que aporta ver-

deos son requeridos por cría y por recría. La actividad cría aporta terneros, sin tener una compensación económica directa por ello, razón por la cual en su función objetivo figura su costo directo y no su margen bruto.

Los terneros son requeridos por venta o por recría. No hay terneros ni verdeos disponibles, por tanto en ambas restricciones figura un cero en su segundo miembro. Esto significa que todos los verdeos que se consumirán necesitan indefectiblemente del aporte brindado por cultivo verdeo. Otro tanto se puede decir de terneros: tanto para venderlos como para recriarlos se debe activar la actividad cría.

	Unidades	Cría P_1	Venta terneros P_2	Recría P_3	Cultivo verdeos P_4	Ovinos P_5	Soja P_6	Trigo P_7	
Unidades		Vaca	Tern.	Tern.	Ha.	Oveja	Ha.	Ha.	Po
Tierra para cultivos	Ha.				1		1	1	$\leq$ 200
Verdeos	Ha.	0.1		0.2	-1				$\leq$ 0
Terneros	Cab.	-0.5	1	1					$\leq$ 0
Pradera natural	Ha.	1		0.3		0.2			$\leq$ 800
Trabajo otoño	h.	1.3	0.1	0.8	2.7	0.3	3	2.5	$\leq$ 1.200

Solución: MBT: 81.098

Plan óptimo

P_1 cría	336 vacas
P_3 recría	183 terneros
P_4 cultivo verdeo	73 Has.
P_6 soja	127 Has.

Costo de Sustitución

P_2 Venta terneros	7 $/ternero
P_5 Ovinos	1 $/oveja
P_7 Trigo	24$/ha.

Recursos no utilizados

Praderas naturales	379 Ha.

Costo de Oportunidad

Tierra para cultivos	95 $/Ha.
Verdeos	284 $/Ha.
Terneros	202 $/Ha.
Trabajos de otoño	52 $/hr.

El resultado en los dos modelos es el mismo: MBT: 81.098, muchas veces no sucede así. La desagregación es muy práctica cuando se requieren parametrar ciertos aspectos implícitos en la función objetivo, no solo posibilita parametrar el precio (sino también el Margen Bruto) además facilita cualquier modificación del precio sin tener que efectuar para ello como una actividad - agregada cálculos previos respecto al margen bruto.

Resumiendo: conviene desagregar una actividad cuando:

-Un insumo puede proveerse de diferentes orígenes

-Un producto puede utilizarse en distintas formas

También se desagregan:

-Para evitar cálculos que pueden llegar a ser muy complejos

-Facilitar la modificación de datos.

13.11. Transferencia de Actividades

Posibilitan llevar un recurso de una restricción a otra, cuando no hay un costo o un margen asociado a esta transferencia. La función objetivo en las actividades de transferencia es cero. Sin embargo por razones de computación es aconsejable asignarles un costo minúsculo para evitar que se activen innecesariamente. Esto se debe a que durante la computación pueden formarse ciclos, es decir que después de varias interacciones se vuelve a la misma situación de la que se partió para volver a repetir el mismo ciclo, sin arribar a una solución definitiva. Este costo minúsculo por Ej: C = -0,0000001 no altera el resultado final pero evita los ciclos.

Las actividades de transferencia suelen tener bastante aplicación en las restricciones de capital especialmente en los modelos multiperiódicos.

Ejemplo: un sorgo forrajero puede utilizarse directamente como verdeo de verano, o se puede reservar su uso para más adelante como un sorgo diferido en invierno. Se puede apelar a las siguientes posibilidades:

- Formular 2 actividades que anoten verdeo o diferido respectivamente
- Formular una sola actividad de cultivo de sorgo que aporta superficie sembrada con sorgo y dos actividades de transferencia:
  - Una que transfiera esta superficie a la restricción "forraje verano"y
  - Otra que transfiera la superficie a la restricción "forraje de invierno".

La transferencia consistirá entonces en ambos casos en que la respectiva actividad requiere superficie sembrada con sorgo y aporta forraje en verano o invierno según corresponde.

13.12. Introducción forzada de una actividad

Cuando se desea que los costos fijos entren en la solución. Cuando se está maximizando una función objetivo en la solución solo entrarán actividades que tengan márgenes brutos, las que tengan costos fijos solo estarán en la solución si aportan insumos que requieren las actividades con margen bruto. En cambio si se quiere que los costos fijos también sean computados se tiene que forzar la introducción de esta actividad, dado que por si no entrará en la solución por no afectar aportes requeridos por otra actividad.

Ejemplo: las actividades P_1; P_2 y P_3 son actividades agrícolas ganaderas que requieren tierra, trabajo y capital. Para tener en cuenta las diferentes épocas del año en que se necesita o aporta capital, éste se a formulado con sendas restricciones para cada cuatrimestre. La actividad P_4 es el costo fijo que asciende a $ 100.000 en el ejemplo (pago de impuestos, canon de riego, administración secundaria, etc.) hacen que el monto que se debe satisfacer en cada cuatrimestre no sea uniforme.

Introducción forzada de P_4

Z	P_1	P_2	P_3	P_4	Po
	C_1	C_2	C_3	-100.000	
Tierra	a_{11}	a_{12}	a_{13}		$\leq b_1$
Trabajo	a_{21}	a_{22}	a_{23}		$\leq b_2$
Costos fijos:					
Cuatrimestre I	a_{31}		a_{33}	20.000	$\leq b_3$
Cuatrimestre II		a_{42}	$-a_{43}$	70.000	$\leq b_4$
Cuatrimestre III	$-a_{51}$			10.000	$\leq b_5$
Introducción forzada de P_4				1	$= 1$

El cuatrimestre II requiere más de la mitad del total anual, mientras que en los restantes el requerimiento es sensiblemente menor. Fácil es de comprender que P_4 no entrará en la solución, excepto que se le obligue, para ello se tiene la restricción de igualdad "Introducción forzada de P_4" que asegura mediante la ecuación $X_4 = 1$ en una unidad de esta actividad es la totalidad de los costos fijos, o sea 100.000 pesos.

Hay que tener en cuenta que si se incluye el costo fijo en la función objetivo, como se indica en el ejemplo, el resultado hallado no es el margen bruto total sino el ingreso neto. Si se desea obtener el MBT se debe poner cero en el casillero correspondiente a la función objetivo de la actividad costo fijo cuya introducción se quiere forzar.

ANEXOS DEL CAPITULO I

"Cuadros Técnicos"

CUADRO ANEXO N° 1

RESUMEN DE NECESIDADES VARIAS POR CULTIVO

CULTIVOS HA.	PROPIO TRACTOR DE 60 HP HORAS/HA. CON IMPLEMENTOS CALCULADOS PARA LOS EJEMPLOS	M^3 DE AGUA POR HA. NECESARIOS SUELO FRANCO	MANO DE OBRA/HA HORAS TOTAL	CAPITAL CIRCULANTE NECESARIO PESOS/HA.	MARGEN BRUTO DE CONTRIBUCION PESOS/HA.
Cebolla	25.7	17.820	226.51	10.880.600	53.826.585.4
Papa	27.86	6.336	288.56	14.582.300	12.876.600.0
Pimiento	16.32	12.000	465.3	9.152.300	1.993.160.0
Ajo	35.29	4.200	759.82	51.818.600	157.668.582.5
Tomate	37.0	10.989.0	193.95	15.472.300	10.415.100.0
Maíz	12.29	5.184	72.2	4.273.500	1.594.700
Girasol	17.33	3.792	188.29	3.412.200	3.633.844
Soja	8.17	4.800	104.97	2.759.700	3.092.630
Sorgo	7.53	3.801.6	74.65	2.048.500	2.089.100
Trigo	6.38	3.000.0	68.10	2.610.400	1.644.000
Cebada	4.88	3.564.0	60.8	1.753.800	-3.200.000

CUADRO ANEXO N° 2

DATOS TECNICOS (Zona de CORFO-Río Colorado)

CULTIVO	DURACION BARBECHO	S I E M B R A						DISTANCIA HILERAS	NECESIDADES DE AGUA			TOLERANCIA A SALINIDAD	P.H.
		EP. OPTIMA	TEMP. SUELO	DENSIDAD	PROFUNDIDAD	VELOCIDAD A	CANTIDAD/HA		TOTAL mm.	RIEGOS N°	COEFIC. TRANSPIRAC.		
1. Maíz	90-120 días	10-X al 15-XI	12°C	75.000/ha	4 a 5 cm.	5 a 6 km/h.	20 kg/ha	70 cm.	450-500 mm.	4	450-500 kg.agua por kg. mat.seca	8 mmhos	5.5 - 7
2. Sorgo	70- 90 "	10 al 15 XII	15°C	100.000 a 200.000/ha	4 cm.	6 km/h.	12-15 kg/ha	"		3		8 "	
3. Trigo	70- 90 "	IV al VII	3 y 4°C	140-160 c.largo plantas/m2	3 a 5 cm.	"	81 kg/ha	15 cm.	417 mm/ha	3	450-500 kg.agua por kg. mat.seca	5 "	6 - 6.5
4. Cebada	50-60 "	Fines II	6°C	200 pl/m2	2 - 5 cm.	"	65 kg/ha	15 cm.	350 mm/ha	2 - 3		13 "	6 - 9
5. Centeno	50-60 "	"	5 a 6°C	200 pl/m2	"	"	40 kg/ha	15 cm.	300 mm/ha	0 - 3		10 "	6 - 8
6. Avena	50-60 "	"	5°C	250 pl/m2	"	"	70 kg/ha	15 cm.	450 mm/ha	2 - 3		6 "	5.5 - 7.5
7. Girasol	70-90 "	Fines X, principio XI	12-15°C	40-60.000/ha	5 cm.	5 kg/h	6-7 kg/ha	70 cm.					
8. Palaris	50-60 "	III a IV	14°C ó +		1 - 1,5 cm.		4-6 kg/ha	60 cm.					
9. Festuca	50-60 "	III a IV	8-10°C		1 - 3 cm.	3.4 km/h.	4-5 kg/ha	30-40 cm.	500 mm/año/ha	3 - 4		10 "	5 - 9
10. Soja	70-90 "	Fines XI	12-14°C	90.000/ha.	4 cm.	5 km/h.	16 kg/ha	70 cm.	600-700mm/" "	3 - 4		11 "	6 - 6.5
11. Alfalfa	70-90 "	Fin II a fin III	15°C ó +		1.5 a 2 cm.	3.4 km/h.	1.5 kg/ha *	50 a 100 cm.	240 mm/año/ha	2		8 "	6.5 a 8.5
12. Tomate	70-90 "	Fines X	14°C		2 - 3 cm.	3-4 km/h	0.6 a 1.8k/ha	150 cm.	585.6 " " "	11		6 "	6
13. Papa	70-90 "	20 X al 15 XI	14°C	41.625/ha	12 a 15 cm.	7 km/h	2.081 kg/ha.	0,80 -0,90	471.9 " " "	10		8 "	5 a 6
14. Cebolla**	90-120 "	VIII y IX	12-14°C	1.200.000/ha	1.5 cm.	6 km/h	4.2-4.8 kg/ha	0,75 -0,85	735.2 " " "	18		9 "	6 a 6.5
15. Ajo	150-180 "	10 IV Al 20 V	8-10°C	22.000 pl/ha	7 cm.	manual	900-1100kg/ha	80-90 c	330.6 " " "	7		8 "	5.8 a 6.5
16. Pimiento	120-150 "	Transp, X-XI 1°y 2°quince.	14°C	50.000 pl/ha.	7-8 cm.	manual	-	80-90	664.4 " " "	20		6 "	5.5. a 7.0

* Alfalfa para semilla
** Sintética 14

CUADRO ANEXO N° 3

EPOCA DE LABORES EN LOS DIFERENTES CULTIVOS

CULTIVO	LABORES PRESIEMBRA	SIEMBRA	LABORES CULTURALES	COSECHA
AJO	Septiembre - Abril	Abril - Mayo	Junio - Diciembre	Diciembre - Enero
CEBOLLA	Mayo - Agosto	Septiembre	Septiembre - Febrero	Marzo - Abril
PIMIENTO	Junio - Noviembre	Noviembre	Noviembre - Febrero	Febrero - Mayo
TOMATE	Junio - Octubre	Octubre	Noviembre - Marzo	Abril
PAPA	Marzo - Octubre	Octubre	Octubre - Febrero	Marzo
MAIZ	Mayo - Octubre	Octubre	Octubre - Febrero	Abril - Mayo
SOJA	Junio - Noviembre	Noviembre	Diciembre - Febrero	Abril - Mayo
SORGO	Agosto - Noviembre	Noviembre	Diciembre - Marzo	Mayo
GIRASOL	Agosto - Octubre	Noviembre	Diciembre - Marzo	Mayo
TRIGO	Marzo - Mayo	Mayo	Junio - Noviembre	Diciembre
CEBADA	Enero - Marzo	Marzo	Marzo - Noviembre	Diciembre

MANO DE OBRA NECESARIA PARA LOS PRINCIPALES CULTIVOS HORTICOLAS DE LA ZONA PARA 1 H

A J O			C E B O L L A (Siembra y cosecha mecán.)			P I M I E N T O (Transplante)			T O M A T E (Siembra y cosecha m		
Mes	Jornalero	Tractoris.	Mes	Jornalero	Tractoris.	Mes	Jornalero	Tractoris.	Mes	Jornalero	Trac
Sep.		2.31	May.	17.33	0.97	May.	17.85	1.49	Jun.	16.8	1
Oct.			Jun.			Jun.			Sep.	1.05	0
Nov.		1.44	Jul.		1.93	Jul.			Oct.	10.5	11
Dic.			Ago.	3.15	3.85	Ago.	35.7	0.97	Nov.	13.13	3
Ene.		0.97	Sep.	8.65	1.05	Sep.	35.7	0.97	Dic.	18.9	8
Feb.			Oct.	8.4	2.41	Oct.	44.1	4.59	Ene.	14.7	1
Mar.	1.05	2.46	Nov.	11.55	2.42	Nov.	75.75	2.57	Feb.	3.15	0
Abr.	266.7	4.73	Dic.	75.18	3.05	Dic.	58.75	2.57	Mar.	67.2	8
May.			Ene.	38.85	2.10	Ene.	58.75	3.62			
Jun.	16.0		Feb.	9.45		Feb.	63.1	1.52			
Jul.	67.2	2.10	Mar.	10.5	10.66	Mar.	89.3				
Ago.	3.15	2.10				Abr.	35.7				
Sep.	73.5	2.26									
Oct.	7.35	9.77									
Nov.	153.3	1.2									
Dic.	113.4	10.5									
TOTAL	701.65	42.17	TOTAL	183.07	28.44	TOTAL	514.7	18.3	TOTAL	145.43	38

CUADRO ANEXO N°5

MANO DE OBRA PARA LOS CULTIVOS ANUALES MAS IMPORTANTES EN HORAS

CULTIVO	JORNALERO	TRACTORISTA
CEBOLLA	183.07	28.44
AJO	701.65	42.17
PAPA	245.18	30.38
PIMIENTO	514.7	18.3
TOMATE	145.43	38.5
MAIZ	43.8	16.22
SOJA	84.0	9.97
GIRASOL	170.05	8.42
SORGO	55.23	9.43
TRIGO	49.88	8.23
CEBADA	43.2	5.62

N O T A S :

CAPITULO II

1. Evaluación de proyectos de inversión

La evaluación de proyectos es la comparación del resultado que se obtiene mediante un proyecto de inversiones contra un nivel básico o criterio objetivo que a priori ha sido fijado, en relación con el resultado que se desea lograr como producto de dicho proceso.

El criterio objetivo que se prefija, contra el cual se va a comparar, es tan importante en una evaluación como los resultados que se obtienen en función de un esquema tecnológico y económico dado.

Los valores del valor presente (VP), la relación beneficio-costo (B/C) y la tasa interna de retorno (TIR) que se fijan como criterios objetivos para que la inversión sea considerada aceptable, dependen principalmente de las condiciones tecnológicas, de mercado, políticas y sociales, que imperen en el lugar donde la inversión se piense llevar a cabo.

La necesidad de evaluar proyectos en forma técnica y metódica un proyecto de inversión se debe a que los recursos que se pretenderían utilizar en cualquier proyecto son escasos y pueden ser utilizados en teoría en otras alternativas de inversión.

2. Optimización de uso de recursos

En el uso de recursos escasos, a través de un proyecto de inversión, representa el proceso por el cual se logran los objetivos esperados de dicha acción mediante una aplicación de recursos que esté acorde con los niveles disponibles y programados de recursos para dicho proyecto.

La eficiencia del proyecto en lograr los objetivos esperados está dada por la sumatoria de los costos y beneficios, su comparación y análisis, en relación con los objetivos económicos, sociales y políticos del proyecto y la multiplicidad que en estos se presente.

3. Proceso de evaluación

Se deben definir claramente primero:

- Propósitos generales y objetivos
- Metas
- Insumos
- Los productos

Segundo: Se suponen las relaciones de causalidad entre propósitos generales u objetivos, metas, insumos y productos.

Tercero: Se establecen los indicadores que posteriormente permitirán las mediciones y verificaciones en cuanto a lo ocurrido o logrado a través de las relaciones de acción entre objetivos, metas, insumos y productos.

4. Aspectos generales

- Evaluación de los aspectos técnicos
- directivos y administrativos
- " " " " orgánicos
- " " " " de comercialización
- " " " " financieros
- " " " " económicos

4.1. Base del análisis financiero-económico

Inversión.- Es el compromiso de recurso en la esperanza de obtener algunos beneficios durante un período razonablemente largo de tiempo.

4.2. Costos y beneficios

Un proyecto de inversión debe medir los costos y beneficios de inversión para poder comparar tales resultados como criterios básicos, prefijados y con los resultados obtenidos del mismo proceso en las otras alternativas de inversión que se consideran como opciones o alternativas a la que está evaluando.

Los conceptos básicos de costo y beneficio parten del principio de optimización de recursos escasos y estos se dividen en directos e indirectos.
Los primeros se originan por la acción específica de invertir y la cuantificación directa de los insumos y productos utilizados en el proyecto. Los segundos se originan por la acción específica de invertir sobre terceras personas, bienes o servicios.

4.3. Cash-Flow

Las inversiones durante el período o períodos de tiempo del proyecto generan un flujo de gastos e ingresos.
El flujo de ingresos totales, menos el flujo de gastos totales de cada período si resultan en un valor positivo se llaman ingresos netos y si resultan en un valor negativo se denominan desembolsos netos.
El flujo de la serie de ingresos netos y desembolsos netos y sus elementos constituyentes, se denomina cash-flow asociado con o de la inversión.

4.4. Presupuesto de capital

- Puede ser anual, mensual, etc. y su acumulación durante el período se expresa a través del cash-flow.
- El presupuesto del capital global se descompone en:
  - .Presupuesto operativo y
  - .Presupuesto de inversiones
- Es necesario identificar los rubros de gastos de operaciones o inversiones dentro de cada presupuesto para facilitar el análisis general y en especial el de sensibilidad.
- El presupuesto debe identificar los períodos de tiempo y los desembolsos por período en forma precisa.

4.5. Etapas de Evaluación

- Identificar costos de operación e inversiones a lo largo del tiempo y por período de tiempo y su suma para obtener los costos totales y en cada período (mes).
- Identificación de los ingresos programados en el total del período de tiempo y su suma para obtener los ingresos totales y en el período.
- Cálcular los costos e ingresos y compararlos no es suficiente ya que el proceso no contempla el aspecto del tiempo en ambos elementos.

4.6. Incertidumbre

La incertidumbre del negocio agropecuario no se puede eliminar; está innata en la dependencia ecológica de la actividad agropecuaria,
La incertidumbre de la estabilidad en las frecuencias de consumo por los

productos agropecuarios y el poco control que tienen los inversionistas por el mercado de sus productos es otro elemento que introduce a veces los cambios más radicales.

El elemento más importante que se añade a la incertidumbre ecológica y socio-económica del negocio agropecuario es el uso alternativo de los fondos de inversión (costos de oportunidad), por lo cual es necesario que la evaluación tome en consideración el valor del dinero y el efecto del tiempo sobre el mismo (interés sobre la inversión).

4.7. Medidas de evaluación que no consideran el efecto del tiempo

Se propone a consideración una serie de medidas sin considerar el efecto tiempo en el cash-flow.

a. Método de período de pago o "Payback period" . Es el período de tiempo que el flujo de ingresos necesita como resultado de la inversión, para igualar los desembolsos requeridos por la inversión. El inversionista establece la longitud máxima del período que esta dispuesto a aceptar como adecuadò.

b. Método del período de repago.- Con un ejemplo, utilizando datos supuestos se puede ilustrar mejor:

CUADRO N° 4

Ejemplo del método del cálculo:

AÑOS	COSTO INVERSION C.I.	COSTO OPERACION C.O.	INGRESOS BRUTOS I.B.	INGRESOS BRUTOS ACUMULADOS In.Acu.
1	1.000	700	150	150
2	250	500	300	450
3		200	500	950
4		200	500	1.450
5		200	500	1 .950
TOTAL	1..250	1 800	1.950	4.950

El período de repago es 4 años .

c. Método de ingreso por unidad de inversión. Es el índice que resulta de dividir todos los ingresos por los costos de inversión.
Siguiendo el Ej . propuesto:

$$\text{Ingreso por unidad de inversión} = \frac{1.950}{1.250} = 1.56$$

4.8. El Concepto del Valor Presente de una suma futura.- •

Es la cantidad de pesos que se necesita invertir hoy para que luego de x períodos se tenga una cantidad de unidades igual a la que se promete.

El valor presente depende de la tasa de interés y la frecuencia con que se acumulen los intereses pagados.

Ejemplo: Si se tiene una promesa de recibir 100 pesos al final de 2 períodos y si una unidad invertida al 3% y acumulada periódicamente será en dos períodos 1,0609 es posible encontrar el VP al 3% de 100 pesos x 1,0609 = 94,26 .

4.9. Interés Compuesto

La fórmula:

$$Cn = Co\ (1+i)^{n}$$

Donde:

Cn = Valor final del capital
Co = Valor inicial del capital
i = tasa de interés
n = períodos de tiempo

4.10. Valor actual

El cálculo del valor actual requiere de una operación inversa al interés compuesto, ya que en este problema es conocer el monto final si se sabe el - inicial la tasa de interés y el número de períodos de capitalización. En el cálculo del valor actual se requiere el monto inicial y se sabe el monto final, la tasa de interés y el número de períodos de capitalización.

Despejando Co de la fórmula básica del interés compuesto:

$$Co = \frac{Cn}{(1+i)^{n}} \quad \text{donde} \quad Co = \frac{1}{(1+i)^{n}} = (1+\ i)^{\ n}$$

Factor de actualización

5. Precio sombra

En un bien o servicio es aquel que se establece a diferencia del precio de mercado de dicho bien o servicio para reconocer la posible sobre o subvaloración que el precio de dicho bien o servicio haya sufrido por efecto de elementos no previstos o puede sufrir durante la vida del proyecto.

Los componentes de un proyecto que se someten al cálculo de su precio som-

bra son:

- Mano de obra
- Divisas

El primero se considera por los problemas de escasez, abundancia, ciclos, productividad, movilidad y capacitación a que ésta se ve expuesta durante la vida del proyecto. La segunda se analiza porque generalmente se ve afectada por elementos de caracter externo al control del proyecto.

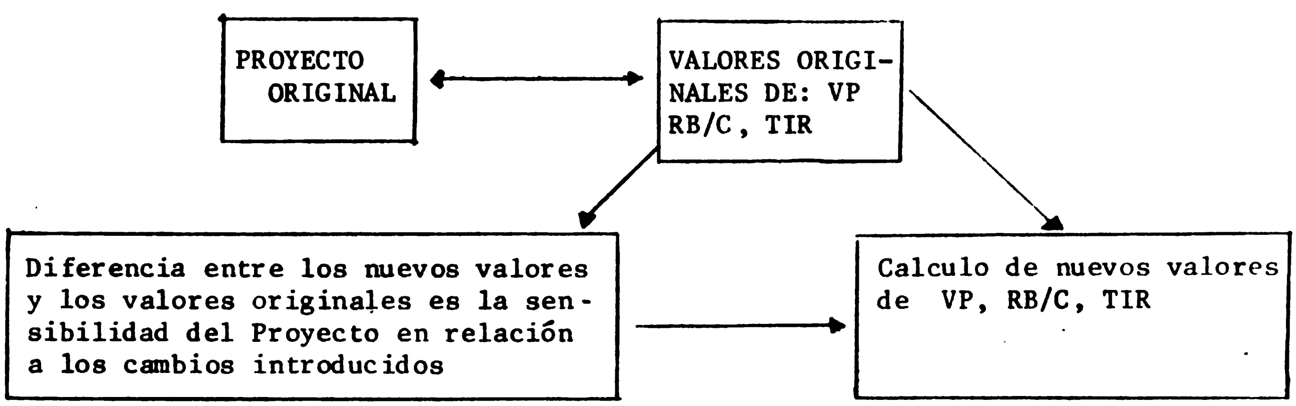
La modificación en los precios se realiza en base a criterios técnicos y económicos, a los cuales se asumen en función de cambios que se supone po--- drían ocurrir dado ciertos supuestos.

5.1. Los precios sombra y el Análisis de Sensibilidad

El análisis de sensibilidad de una inversión consiste en la "modificación" de alguno de los "elementos" del proyecto y en calcular de nuevo el VP la relación B/C y la TIR, observando los cambios que se producen y la dirección de estos en los tres indicadores básicos de evaluación.

La sensibilidad está relacionada con los precios sombra ya que éstos son - los posibles cambios a introducir en un proyecto de inversión.

5.2. Diagrama explicativo de la sensibilidad



FUENTE: JUAN ANTONIO AGUIRRE

Los elementos a sensibilizar más comunmente en un proyecto de inversión - son:

- Valor de la mano de obra
- Valor de la divisa
- Los coeficientes técnicos
- Los precios de los productos finales y
- Los precios de los bienes y servicios

Los cambios anteriores y otros que pudieran hacerse, constituyen los lugares donde se pueden hacer cambios en un proyecto. Se puede además combinar -- cualquiera de las fuentes de cambios y ver su efecto simultáneo sobre el VP, la R C/B y la TIR originales.

5.3. Precio sombra de la mano de obra

Significa valorarlo a un nivel diferente al que el mercado pagaría por este recurso, ya que el nivel de precio se establece en el mercado por el libre - juego de la oferta y la demanda dependiendo de la cantidad, calidad y posibilidades de movilidad del mismo.

5.3.1. Primer método del cálculo

- En el caso normal, el cálculo de los valores originales del VP, RC/B y TIR se hace en base al valor del jornal que se paga en la práctica para mano de obra, semiespecializada, especializada y no especializada.
- Leyes de salarios, establecen niveles de "salario mínimo" que en la generalidad de los casos puede ser diferente al que en la práctica se paga.
- Lo anterior hace necesario que se establezcan ambos niveles y se calcule el porcentaje que el salario real representa del legal.

$$\% \text{ de ajuste} = \frac{\text{Salario Real}}{\text{Salario legal}}$$

- El resultado del ajuste puede ser:

  $>$ que 1
  $=$ a 1
  $<$ que 1

- Cuando es $>$ que 1 indicaría que el salario real es mayor que el mínimo legal (lo cual sería raro). Por tanto habría que reducir la "cuenta" de mano de obra por la diferencia % entre uno y otro nivel.
- En el caso de ser $=$ a 1 no sería necesario ninguna alteración.
- Si el resultado es $<$ que 1, el salario real es menor que el legal por lo cual habría que aumentar la "cuenta" mano de obra en el % diferencial que falta para hacer llegar a 1 el resultado.

Los ajustes pueden hacerse de dos formas:

a) Tomando los diferenciales de salarios real y legal y haciendo los ajustes correspondientes en base a los requerimientos físicos.

b) Ajustando hacia arriba y hacia abajo el valor de la cuenta de mano - de obra. Este procedimiento, aunque más rápido, es menos exacto, ya que no toma en cuenta las diferencias en calidades y otros factores entre tipos de mano de obra.

5.3.2. Segundo método del cálculo

Calcula el valor del producto marginal de la mano de obra a través del uso de las funciones de producción del tipo Cobb-Douglas:

$$y = a\, x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot x_3^{b_3}$$

Donde la y es variable dependiente

y = Ingreso total

Y las x o variables independientes

x_1 = Superficie en explotación

x_2 = Gastos e insumos

x_3 = Gastos en mano de obra

Luego por los procedimientos matemáticos conocidos se tiene:

$$VPM = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot b$$

Donde:

Y = Promedio del ingreso total del grupo en estudio
X = Promedio de gasto total del rubro dado del grupo de estudio

El valor presente marginal obtenido por este método se compara con la situación "real" y con el salario legal en cuanto al valor de la mano de obra y se procede de la siguiente forma:

- Se calcula el VPM por unidad monetaria gastada en mano de obra. Lo anterior establece por cada unidad el retorno o VPM que se recibirá y se - ajusta la cuenta de mano de obra en función de la magnitud de la dife-

rencia entre 1 y el VPM y en función del tipo de diferencia.

5.4. Precio sombra de la divisa

5.4.1. Primer método

El PSD es la unidad más el promedio ponderado de las diferencias entre los precios domésticos de los bienes de consumo y los precios internacionales. Los pesos o ponderadores son las fracciones que de la cuenta marginal neta de im-- portaciones representa cada bien.

Fórmula:

$$P_{SD} = 1 + \sum_{i=1}^{h} ti \quad \frac{X_i}{R}$$

Donde:

X_i = Importación neta de un bien privado i

$$R = \sum_{i=1}^{n} X_1$$

ti = Diferencia que existe entre el precio del bien a nivel local y el precio internacional por el producto que se importe

La principal ventaja de utilizar la fórmula de Harberger- Dasgupta es que requiere solo datos del comercio exterior, los cuales aún en las peores condiciones, son una razonable posibilidad de obtención en los países en vías de desarrollo.

Las principales hipótesis son:

- Disponibilidad de divisa en el margen afecta solo los flujos de comercio
- Importancia de bienes de capital en el margen es irrelevante.
- La producción de bienes de consumo nacional no se ve afectada en el margen por disponibilidad de divisas
- Las exportaciones no son seriamente afectadas cuando se dispone de una - unidad extra de divisas
- Los bienes importados de consumo se distribuyen al consumidor a través de un mercado de libre compentencia.

El método y sus hipótesis establecen el impacto que un incremento marginal en la divisa tendría en el volumen de los bienes de consumo que se importan al país. El método propuesto por Harberger y modificado por Dasgupta no es la - única y tampoco la mejor alternativa, pero es la más facil de aplicar.

5.4.2. Segundo método del cálculo del PSD

- El sistema parte de la diferencia entre el cambio oficial y el mercado negro y hace los ajustes correspondientes.
- El sistema consiste,en caso de existir cambios múltiples , en utilizar para el componente externo los varios sistemas que existen en relación con el componente externo para los proyectos de inversión, de origen - agropecuaria.
- El nivel que se fija entre un uso y otro no necesariamiente responde a consideraciones de caracter técnico-económico y más a condiciones políticas,independiente de esto debe de introducirse en el análisis de sensibilidad.

6. Ejemplo de aplicación

Se tomará como ejemplo el cultivo de cebolla por ser el primero del Vademecum además por la importancia que tiene para CORFO.
Obtenido el cash-flow en el cuadro respectivo del cultivo anotado se procedería en la siguiente forma:

CUADRO N°5

CASH - FLOW
(En miles de pesos)

MAY.	JUN.	JUL.	AGO.	SET.	OCT.	NOV.	DIC.	ENE.
-232.9	-27.5	-882.8	-733.8	-2.162.7	-615.2	-773.7	-1.732.5	-609.0
FEB.	**MAR.**	**ABR.**	**MAY.**	**JUN.**	**JUL.**	**AGO.**		
-83.0	-3.141.0	-53.5	6.842.2	11.934.8	11.796.6	7.280.7		

Este flujo efectivo está representado por las categorías y montos de costos e ingresos que se incurren por período y a lo largo del período total de tiempo de la inversión en el cultivo de cebolla propuesto.

6.1. Evaluación Financiera

La aplicación de los conceptos y métodos analíticos descriptos anteriormente al cash-flow para realizar la evaluación financiera del cultivo de cebolla.

Depreciación.- Al ser un cargo contable que reduce las utilidades, no se incluye en ninguno de los análisis financieros o económicos porque en ambos se incluyen los gastos de inversión como costos, por lo que no es necesario incluir la depreciación ya que sería cargar a la inversión dos veces con la misma cosa.

6.2. Medidas o indicadores de evaluación

- VP que es igual al valor actualizado de los beneficios menos el valor actualizado de los costos.
- La relación B/C es igual al valor actualizado de los beneficios entre el valor actualizado de los costos.
- La TIR que es aquella tasa según la cual el valor actualizado de los beneficios es igual al valor actualizado de los costos.

6.3. Cálculo del VP

- Se obtiene el cash-flow de cebolla que se presenta anteriormente cuadro N° 5.
- Luego se estableció la tasa de interés del 10% como factor de descuento.
- Se buscó en la tabla N°10 la tasa de interés para cada una de las etapas. Luego se multiplica el cash-flow por el factor de actualización. Se establece otra columna de cash-flow descontado. Luego se suman los cash-flow negativos obteniéndose un total; de igual forma los positivos.

  De la suma de los cash-flow positivos se resta la suma de los negativos; el resultado es el valor presente de la inversión.

  Si el valor presente obtenido es positivo, el retorno o el valor de la inversión es mayor que la tasa de interés o la que se descontó.

  Mientras que más alto sea el VP al nivel de interés dado, mejor es la inversión en términos financieros.

En el siguiente cuadro se puede apreciar lo anotado.

CUADRO N° 6

En miles de pesos.-

ETAPAS	CASH-FLOW	FACTOR DE DESCUENTO AL 10%	CASH-FLOW DESCONTADO
1	- 232.9	0 .9091	- 211.73
2	- 27.5	0.8264	- 22.73
3	- 882.8	0.7513	- 663.25
4	- 773.8	0 6830	- 528.51
5	- 2.162.7	0.6209	- 1.342.82
6	- 615 2	0.5645	- 347.28
7	- 773.7	0.5132	- 397.06
8	- 1 732.5	0.4665	- 808.21
9	- 609.0	0 .4241	- 258.28
10	- 83.0	0.3855	- 32.0
11	- 3.141.0	0.3505	- 1.100 .92
12	- 53.5	0.3186	- 17.05
13	6.842.2	0.2897	1.982.19
14	11.934.8	0.2633	3.142.43
15	11.796.6	0.2394	2.824.11
16	7.280.7	0.2176	1.584.28

Σ de ingresos netos descontados + 9.533 .01

Σ de desembolsos netos descontados - 5 .729.84

$$VPF_{10\%} = 9.533.01 - 5.729.84 = 3.803.17$$

6.4. Cálculo de la Relación Beneficio/costo financiero

Del Cuadro N° 6 de la cebolla se toman los costos totales y los ingresos por etapas . Luego se fija la tasa de interés del 12%, se obtienen los valores en la tabla N° 10, luego se suman los costos totales descontados, se obtiene la suma de los ingresos brutos descontados y luego se dividen - los valores.

Fórmula:

$$\text{Relación B/CF} = \frac{\text{suma ingresos brutos totales descontados}}{\text{suma de costos totales descontados}}$$

La relación beneficio/costo debe ser como mínimo 1, cualquier valor menor es motivo para descartar la inversión, ya que los beneficios serían menores que los costos.

CUADRO N° /

En miles de pesos.-

ETAPAS	COSTO TOTAL	INGRESOS BRUTOS	FACTOR DE DESCUENTO AL 10%	COSTO TOTAL DESCONTADO	INGRESO TOTAL DESCONTADO
1	232.9		0.9091	211.73	
2	27.5		0.8264	22.73	
3	882.8		0.7513	663.25	
4	773.8		0.6830	528.51	
5	2.162.7		0.6209	1.342.82	
6	615.2		0.5645	347.28	
7	773.7		0.5132	397.06	
8	1.732.5		0.4665	808.21	
9	609.0		0.4241	258.28	
10	83.0		0.3855	32.00	
11	3.141.0		0.3505	1.100.92	
12	53.5		0.3182	17.02	
13	6.507.3	13.349.5	0.2897	1.885.16	3.867.35
14	9.739.2	21.674.0	0.2633	2.564.33	5.706.76
15	9.416.8	21.213.4	0.2344	2.254.38	5.078.49
16	5.824.1	13.104.8	0.2176	1.267.32	2.851.60
TOTAL:	42.535.0	69.341.7			17.504.20

$$R\ B/CF_{10\%} = \frac{17.504.2}{13.701.0} = 1.28$$

6.5. <u>Cálculo de la TIR F</u>

a) Se obtiene el cash-flow
b) Se establece una tasa de interés (descuento) básico que puede ser la misma del valor presente o cualquier otra.
b_1)Se buscan en la tabla N° 10 los factores de descuento y se multiplican por los cash-flow positivos
b_2)Se suman los valores positivos y negativos descontados y se resta uno del otro.
c) Se seleccionan las tasas de descuento y se realizan las operaciones de la face (b) las veces que sean necesarias hasta que el valor presente de los beneficios netos descontados se convierta en negativos. Se recomiendan cambios de 5 en 5 en las tasas de descuento.
c_1)Convertido en negativo el valor presente de los beneficios netos descontados, se utiliza la fórmula de interpolación para encontrar la TIR

Fórmula de interpolación para estimar la TIR

$$\text{Ultima tasa de descuento que dio VP +} \; + \; \frac{\text{Ultimo VP +}}{\text{Suma sin considerar el signo del último VP + y el 1er VP}} \; \times \; \text{Diferencia entre las dos últimas tasas de descuento utilizadas}$$

Desarrollo del cálculo de la TIR F
Se extrae del Cuadro N° 7 el cash-flow, luego en la tabla N° 10 se obtienen los valores para 15% y 20%.
Si como se dijo el resultado es negativo, se puede aplicar la fórmula para calcular la TIR.

CUADRO N° 8

T. I. R.

ETAPAS	CASH FLOW	FACTOR DE DESCUENTO AL 15%	CASH-FLOW DESCONTADO	FACTOR DE DESCUENTO AL 20%	CASH-FLOW DESCONTADO
1	- 239.9	0.8696	- 208.62	0.8333	- 199.91
2	- 27.5	0.7561	- 20.79	0.6944	- 19.10
3	- 282.8	0.6575	- 283.46	0.5787	- 163.66
4	- 773.8	0.5718	- 442.46	0.4823	- 373.20
5	- 2.162.7	0.4972	- 1.075.29	0.4019	- 869.19
6	- 615.2	0.4323	- 265.95	0.3349	- 206.03
7	- 773.7	0.3759	- 290.83	0.2791	- 215.94
8	- 1.732.5	0.3269	- 566.35	0.2326	- 402.98
9	- 609.0	0.2843	- 173.14	0.1938	- 118.02
10	- 83.0	0.2472	- 20.52	0.1615	- 13.40
11	- 3.141.0	0.2149	- 675	0.1346	- 422.78
12	- 53.5	0.1869	- 10	0.1122	- 6
13	6.842.2	0.1625	1.111.86	0.0935	639.75
14	11.934.8	0.1413	1.686.39	0.0779	929.72
15	11.796.6	0.1229	1.449.8	0.0649	765.6
16	7.280.7	0.1069	778.31	0.0541	393.89
			993.95		- 281.25

$$\text{TIR} = 15 + \frac{993.35}{(993.35 + 281.25} \times 5 \qquad \text{TIR} = 18.9$$

En el cálculo del valor presente y la relación beneficio/costo, los criterios de selección de la tasa de interés más importante son:

- Las espectativas del inversionista
- Las alternativas de inversión y
- Las condiciones imperantes en el mercado de dinero

En el cálculo de la TIR se eliminan las influencias de los factores antes citados y la rentabilidad final descansa en los propios méritos del proyecto.

Los costos y beneficios calculados en el ejemplo de la cebolla, se pueden cuantificar directamente, sin embargo, existen muchas situaciones en las cuales existen costos y beneficios imputados por la acción de la inversión que son tan importantes como los anteriores.

Los costos y beneficios imputados en forma directa al cultivo (Cuadro Análisis de Costos) son aquellos que se generan por la acción del proyecto en terceras personas, plantas, animales, cosas, bienes o servicios .

7. Evaluación Económica

El análisis económico representa un enfoque con énfasis en el desarrollo económico de la sociedad y se fundamenta en el concepto de valor añadido, - usado en la cuentas nacionales .

El primer paso es la reestructuración de los componentes de costos, eliminando del cálculo de costos los siguientes elementos:

- Impuestos.- Estos se eliminan porque constituyen un pago de transferencia entre un sector de la economía y otro (son fondos que se pagan al - Gobierno para obras de beneficio Público)

- Intereses.- Se eliminan si se paga sobre capital que se ha pedido prestado a otra persona o institución y representa una transferencia que puede estar disponible para otros usos .

- Mano de obra contratada.- Se elimina asumiendo que en países en proceso de desarrollo con altas tasas de desempleo y sub-empleo, el hecho de que ésta se haga productiva es un beneficio a la economía y su costo está por encima de su costo de oportunidad.

El análisis económico obtendrá una TIR mayor al haber eliminado los costos. Dentro de este análisis se opera con los mismos procedimientos anotados en el análisis financiero para la obtención de VPE ; la relación B/CE y la TIR_E. La única diferencia está en la reestructuración de los costos.

8. Análisis de Sensibilidad

El proceso y ajuste de los valores del Cuadro N° 8 de cash-flow con base en los precios sombra de la mano de obra y divisa.

a) Se calculan o se hipotetizan ciertos posibles cambios en los precios sombra de la mano de obra y divisa, a través de estudios específicos mediante métodos sugeridos.

b) Se establece el componente de mano de obra importada en forma pormenorizada.

c) Se prepara un nuevo cuadro que es hecho en base a los anteriores y se modifican los rubros correspondientes, precalculándose con los datos ya sensibilizados mediante los proceso ya anotados.

d) Se podrían establecer en base a los cálculos los niveles de cambio:

- Un aumento promedio de un x % en el costo de los insumos importados.
- Que los costos de la mano de obra podrían aumentar mediante una nueva ley en un x %.
- Que el precio de la cebolla podría aumentar hasta un x %
- El precio sombra de la divisa podría ser x.

Al preparar un nuevo cuadro se calculan los costos sensibilizados y los ingresos sensibilizados al porcentaje que se estime.

Con estos nuevos valores serán calculados tanto los valores financieros y económicos del VP - la relación C/B y la TIR por los métodos ya propuestos.

Con todos los datos así obtenidos se elabora un nuevo cuadro comparativo que contenga las nuevas medidas Financieras y Económicas con y sin precios - sombra.

Las tres medidas de rentabilidad al pasar del criterio privado (Financiero) al Económico social, los índices mejorarán sensiblemente.

El efecto del cambio en los precios de los productos balancea el efecto - de aumento o disminución en los precios de los componentes básicos, mano de obra e insumos para inversión y operación.

El cuadro comparativo para el ejemplo de la cebolla indicaría el efecto que se derivaría de dicha actividad tanto en el campo privado como comunitario.

CUADRO N° 9

MEDIDA DE RENTABILIDAD	FINANCIERO		ECONOMICO	
	Normal	Sensibilizado	Normal	Sensibilizado
Valor presente al 10%	3.803.17	---	---	---
Relación B/C al 10%	1.28	---	---	---
TIR %	18.9	---	---	---

TABLA N°10

FACTORES DE DESCUENTO O VALOR PRESENTE DE US$ 1.00 A TASAS DE INTERES DE 3% a 40%
TASAS DE INTERES
(Tasas de descuento)
$1/(1+g)^n$

Año	3%	4%	5%	6%	7%	8%	10%	12%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	55%	60%
1	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346	0.9259	0.9091	0.8929	0.8696	0.8333	0.8000	0.7692	0.7407	0.7143	0.6897	0.6666	0.6452	0.6250
2	0.9426	0.9246	0.9070	0.8900	0.8734	0.8573	0.8264	0.7972	0.7561	0.6944	0.6400	0.5917	0.5487	0.5102	0.4756	0.4444	0.4162	0.3906
3	0.9151	0.8890	0.8638	0.8396	0.8163	0.7938	0.7513	0.7118	0.6575	0.5787	0.5120	0.4552	0.4064	0.3644	0.3280	0.2963	0.2685	0.2441
4	0.8885	0.8548	0.8227	0.7921	0.7629	0.7350	0.6830	0.6355	0.5718	0.4823	0.4096	0.3501	0.3011	0.2603	0.2262	0.1975	0.1732	0.1526
5	0.8626	0.8219	0.7835	0.7473	0.7130	0.6806	0.6209	0.5674	0.4972	0.4019	0.3277	0.2693	0.2230	0.1859	0.1560	0.1317	0.1118	0.0954
6	0.8375	0.7903	0.7462	0.7050	0.6663	0.6302	0.5645	0.5066	0.4323	0.3349	0.2621	0.2072	0.1652	0.1328	0.1076	0.0878	0.0721	0.0596
7	0.8131	0.7599	0.7107	0.6651	0.6227	0.5835	0.5132	0.4523	0.3759	0.2791	0.2097	0.1594	0.1224	0.0949	0.0742	0.0585	0.0465	0.0373
8	0.7894	0.7307	0.6768	0.6274	0.5820	0.5403	0.4665	0.4039	0.3269	0.2326	0.1678	0.1226	0.0906	0.0678	0.0512	0.0390	0.0300	0.0233
9	0.7664	0.7026	0.6446	0.5919	0.5439	0.5002	0.4241	0.3606	0.2843	0.1938	0.1342	0.0943	0.0671	0.0484	0.0353	0.0260	0.0194	0.0146
10	0.7441	0.6756	0.6139	0.5584	0.5083	0.4632	0.3855	0.3220	0.2472	0.1615	0.1074	0.0725	0.0497	0.0346	0.0243	0.0173	0.0125	0.0091
11	0.7224	0.6496	0.5847	0.5268	0.4751	0.4289	0.3505	0.2875	0.2149	0.1346	0.0859	0.0558	0.0368	0.0247	0.0168	0.0116	0.0080	0.0057
12	0.7014	0.6246	0.5568	0.4970	0.4440	0.3971	0.3186	0.2567	0.1869	0.1122	0.0687	0.0429	0.0273	0.0176	0.0116	0.0077	0.0052	0.0036
13	0.6810	0.6006	0.5303	0.4688	0.4150	0.3677	0.2897	0.2292	0.1625	0.0935	0.0550	0.0330	0.0202	0.0126	0.0080	0.0051	0.0033	0.0022
14	0.6611	0.5775	0.5051	0.4423	0.3878	0.3405	0.2633	0.2046	0.1413	0.0779	0.0440	0.0254	0.0150	0.0090	0.0055	0.0034	0.0022	0.0014
15	0.6419	0.5553	0.4810	0.4173	0.3624	0.3152	0.2394	0.1827	0.1229	0.0649	0.0352	0.0195	0.0111	0.0064	0.0038	0.0023	0.0014	0.0009
16	0.6232	0.5339	0.4581	0.3936	0.3387	0.2919	0.2176	0.1631	0.1069	0.0541	0.0281	0.0150	0.0082	0.0046				
17	0.6050	0.5134	0.4363	0.3714	0.3166	0.2703	0.1978	0.1456	0.0929	0.0451	0.0225	0.0116	0.0061	0.0033				
18	0.5874	0.4936	0.4155	0.3503	0.2959	0.2502	0.1799	0.1300	0.0808	0.0376	0.0180	0.0089	0.0045	0.0023				
19	0.5703	0.4746	0.3957	0.3305	0.2765	0.2317	0.1635	0.1161	0.0703	0.0313	0.0144	0.0068	0.0033	0.0017				
20	0.5537	0.4564	0.3769	0.3118	0.2584	0.2145	0.1486	0.1037	0.0611	0.0261	0.0115	0.0053	0.0025	0.0012				

N O T A S :

NOTA 1: No se completa el cálculo del cuadro anterior con el objeto de que alguien lo realice como ejercicio y obtenga sus propias interpretaciones.

NOTA 2: Para los cultivos de este vademecum se calculó la TIR y sensibilidad de los ejemplos propuestos en forma mecánica (directa HP 41) y no se incluyó ni VP ni Relación B/C por no creerlo importante al tratarse de análisis de un cultivo. Pero sí consideramos importante la descripción anotada sobre evaluación de inversiones ya que uno de los objetivos de este estudio es ofrecer datos y métodos para el análisis evaluativo de Proyectos.

NOTA 3: En el cálculo del Margen Bruto por cultivo se incluyó el costo de oportunidad (interés sobre el capital circulante o de operación) en los costos variables, siendo esto opcional y pudiendo calcularse el Margen Bruto sin este interés incluído en los costos variables del cultivo.

NOTA 4: Los ejemplos planteados como casos son arbitrarios y sirven para ilustrar los problemas de programación lineal.

B I B L I O G R A F I A

PROGRAMACION LINEAL

- Programación Lineal - Saul I. Gass
- Investigación de Operaciones - Martín R. Starr
- Linear Programming applications to Agriculture - University IOWA-R. BENERE
- Lineamientos de Programación Lineal (Universidad Bs.As. - Roberto Vasquez
- Programación Lineal - Ing.Agr. Marcelo E. Regúnaga
- Lineamientos de Programación Lineal - P. Bonatti
- Consultas varios profesionales - Universidad del Sur - IICA - BID
- Proyectos B.N.F. - Banco Nacional Fomento - Ecuador
- Cátedra de Producción Industrial - Universidad Politécnica - Ecuador
- Formulación de Matrices - Guillermo Frank - Buenos Aires.
- Producción y Planificación - Von Urff W.
- Minimization of nou - Sinear separable couwe functionals - Chanes A. Lemke
- Aproximate and exact solution to nou linear programing problem with separable objetive function - Yaron, Dan - O. Heady.
- Métodos y modelos de la investigación de operaciones - Kanf Mann, A.
- Notas y uso de la IBM MPSX en programación lineal - B. F. Stanton

EVALUACION DE PROYECTOS DE INVERSION

- Análisis Económico de Proyectos Agrícolas - GITTINGER J.P. - Estados Unidos
- Evaluación de Proyectos - Harberger - Chicago, Estados Unidos
- Introducción a la Evaluación Económica y Financiera de Invérsiones Agropecuarias - Juan Antonio Aguirre - IICA.

FECHA DE DEVOLUCION
