SERIE DE PUBLICACIONES MISCELANEAS No. 142

MANUAL PRACTICO PARA EL ANALISIS DE EXPERIMENTOS DE CAMPO

Víctor Quiroga Mag.Sc.

IICA
INSTITUTO INTERAMERICANO DE CIENCIAS AGRICOLAS – OEA
DIVISION DE PROCESAMIENTO DE DATOS

Programa de Información Agropecuaria del Istmo Centroamericano
–PIADIC–

San José, Costa Rica
Diciembre 1976

SERIE DE PUBLICACIONES MISCELANEAS No. 142

MANUAL PRACTICO PARA EL ANALISIS DE EXPERIMENTOS DE CAMPO

Víctor Quiroga Mag.Sc.

IICA

DIVISION DE PROCESAMIENTO DE DATOS

Programa de Información Agropecuaria del Istmo Centroamericano
– PIADIC –

San José, Costa Rica
Diciembre 1976

La necesidad creciente por manuales en español, que describan metodologías estadísticas aplicadas a la investigación agropecuaria, nos inducen a presentar este material técnico para el análisis e interpretación de resultados experimentales.

Se remarca nuestro agradecimiento al Programa de Información Agropecuaria del Istmo Centroamericano PIADIC, por su acertada política de incentivar la elaboración de manuales aplicable a los sistemas de información agrícola del Istmo.

Al Personal de la División de Procesamiento de Datos del IICA por su colaboración permanente y tenáz.

La necesidad creciente por manuales en es-
pañol, que describan metodologías estadís-
ticas aplicadas a la investigación agrope-
cuaria, nos inducen a presentar este mate-
rial técnico para el análisis e interpre-
tación de resultados experimentales.

Se remarca nuestro agradecimiento al Pro-
grama de Información Agropecuaria del Ist-
mo Centroamericano PIADIC, por su acerta-
da política de incentivar la elaboración
de manuales aplicable a los sistemas de
información agrícola del Istmo.

Al Personal de la División de Procesamien-
to de Datos del IICA por su colaboración
permanente y tenáz.

00000285

CONTENIDO

Página

Página

Figuras

Página

Lista de Cuadros

Cuadro No.		Página

Cuadro No.		Página
6.2	Análisis de varianza irrestricto al azar.............	73
6.3	Cálculo del comparador Duncan.........................	74
6.4	Promedios tabulados de menor a mayor en un cuadro de 2 entradas..	74
6.5	Cálculo del comparador Tukey..........................	75
6.6	Promedios tabulados de menor a mayor..................	75
6.7	Análisis de varianza..................................	77
6.8	Promedio de tratamientos..............................	77
6.9	Análisis de varianza irrestricto al azar.............	77
6.10	Contrastes ortogonales................................	78
6.11	Análisis de varianza final............................	78
6.12	Datos de experimentos con niveles de nitrógeno........	78
6.13	Análisis de varianza en bloques al azar...............	79
6.14	Contrastes ortogonales................................	79
6.15	Coeficientes y Divisor para polinomios ortogonales....	82
7.1	2 factores a 2 niveles................................	84
7.2	Lista de tratamientos.................................	84
7.3	Factorial 2^3...	85
7.4	Lista de tratamientos.................................	85
7.5	2 factores a 3 niveles................................	86
7.6	Lista de tratamientos.................................	86
7.7	Factorial 3^3...	87
7.8	Lista de tratamientos en promedio.....................	87
7.9	Experimento tabulado..................................	88

Cuadro No.		Página
7.10	Análisis de varianza preliminar	89
7.11	Contrastes	89
7.12	Análisis de varianza final	90
7.13	Rendimiento de soya (Tn/Ha.)	91
7.14	Cálculo de contrastes	91
7.15	Análisis de varianza	92
7.16	Interacción réplica por NPK	92
7.17	Croquis (B.C.R.)	95
7.18	Análisis de varianza	95
7.19	Experimento tabulado	96
7.20	Para parcela grande	96
7.21	Para parcela pequeña	96
7.22	Análisis de varianza	97
8.1	Representación simbólica de los datos Y_{ij}	99
8.2	Análisis de covarianza X - Y	100
8.3	Peso de la materia seca de frijol a los 30 días por unidad experimental (grs) (Y)	102
8.4	Número de plantas de frijol a los 30 días por unidad experimental (X)	102
8.5	Análisis de covariancia final (resultado)	104
8.6	Ajuste de promedios de tratamientos	104

1. INTRODUCCION

1.1 EXPERIMENTO.

Es una pregunta planeada con el propósito de obtener resultados o nuevos hechos, que servirán para la toma de decisiones acerca de las hipótesis planteadas, o bien, para rechazar o confirmar los resultados de anteriores experimentos.

1.2 TIPOS DE EXPERIMENTOS.

Experimentos preliminares, esencialmente son de naturaleza exploratoria donde se prueba un gran número de tratamientos con el propósito de obtener directrices para el futuro trabajo.

Experimentos críticos, planeados con menor número de tratamientos pero con suficiente número de observaciones por tratamiento con el propósito de obtener diferencias significativas.

Experimentos demostrativos, son los realizados en parcelas de gran tamaño para comparar nuevos tratamientos con el testigo.

1.3 UNIDAD EXPERIMENTAL.

La unidad experimental o parcela experimental es la mínima unidad física al que se aplica el tratamiento, v:gr: un ternero, 20 aves por jaula, 1 m de pastura, media hoja, etc.

1.4 ERROR EXPERIMENTAL.

Los fenómenos naturales objeto de la experimentación, se caracterizan por su variación natural. El error experimental, mide la variación que existe entre unidades experimentales que reciban tratamiento similar. El error experimental fundamentalmente proviene de la variación inherente del material experimental, de las fuentes de variación no identificadas en el experimento y de la variación resultante de una carencia de uniformidad en la conducción física del experimento. El esfuerzo del investigador debe centrarse en minimizar el error experimental.

1.5 REPETICION.

Es el hecho físico de repetir un tratamiento más de una vez en el experimento, la función que cumple es proveer una estimación del error experimental y aumentar la precisión del experimento; el error estandar de la media se hace pequeño a medida que aumenta el número de repeticiones.

1.6 TRATAMIENTOS.

Es el procedimiento o medio físico cuyo efecto se mide para comparar con el de otro tratamiento. A mayor conocimiento de los tratamientos mejor delineamiento del procedimiento estadístico, así cuando se experimenta con niveles de algún nutrimento, será aconsejable usar varios niveles del mismo para determinar si la respuesta sigue el modelo lineal, cuadrático, etc.

1.7 ALEATORIZACION.

Tiene por función, asegurar que el estimador del error experimental y de los tratamientos no tengan sesgo o vicio. La aleatorización elimina la correlación entre los errores.

1.8 FENOMENO NATURAL.

Un fenómeno natural que se supone tiene una distribución normal está perfectamente definido por dos parámetros: μ y σ^2. El primer parámetro de posición y el segundo de variación. La variable referida a este fenómeno natural tiene el dominio ($- \infty < X < \infty$).

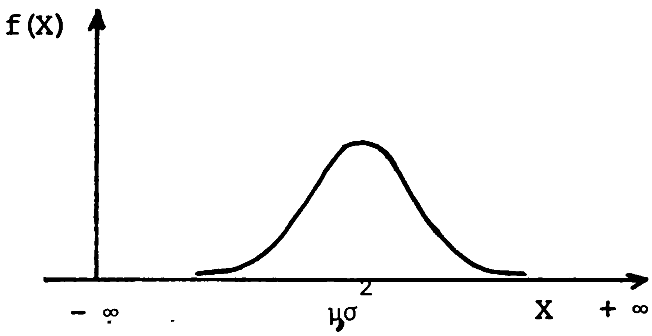

Figura 1.1 Fenómeno natural con distribución normal.

1.9 MODELO ESTADISTICO QUE IMPLICA UNA POBLACION.

Se utiliza este término a causa de la introducción de elementos aleatorios en el modelo.

$$Y_i = \mu + \varepsilon_i \qquad |1|$$

Donde:

Y_i = Observación particular

μ = parámetro a estimar

ε_i = error

1.10 MODELO ESTADISTICO QUE IMPLICA DOS O MAS DE DOS POBLACIONES.

En diseño de experimentos, usualmente se define dos o más poblaciones, luego habrán modelos estadísticos que implican dos o más poblaciones v:gr: Se trata de evaluar la producción de cierto cultivar, manteniendo las condiciones del medio ambiente, calidad genética de la semilla, etc., y variando unicamente el tipo de suelo donde se conducirá el experimento (t suelos): en forma tabulada tendríamos:

Cuadro 1.1 Datos codificados de un experimento que implica dos o más de dos poblaciones.

		OBSERVACIONES		
TRATAMIENTO (i)		1	2	n
Suelo 1	t_1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{1n}
Suelo 2	t_2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{2n}
⋮	⋮			⋮
Suelo i	t_t	....		Y_{tn}

Sin embargo, el modelo estadístico definido anteriormente sería poco objetivo porque toda la masa de información tiende a ser representada como una población única con media común que no siempre es realista, ya que la tendencia de los parámetros no será siempre a la de una media común.

La discrepancia entre las medias generadas por los tratamientos y la media común resultan del efecto de los suelos particulares t_1, t_2, ...,t_t recibe el nombre de 'Efecto de tratamiento', es decir:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu + \tau_1 \\ \mu_2 &= \mu + \tau_2 \\ &\vdots \\ \mu_i &= \mu + \tau_1 \end{aligned} \qquad |2|$$

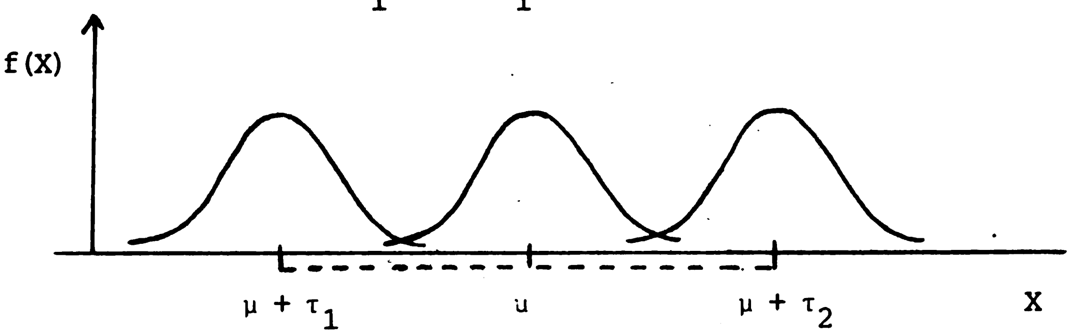

Figura 1.2 Efecto de los tratamientos sobre la media común μ.

El modelo adecuado para esta situación es:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \qquad |3|$$

Reemplazando la media μ por la relación |2| obtenemos:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad |4|$$

Que es precisamente el modelo estadístico que implica 2 o más poblaciones de tratamientos. (t suelos para la anterior ilustración).

Donde:

Y_{ij} = Observación individual

μ = Efecto del tratamiento

τ_i = Efecto del tratamiento

ε_{ij} = Error experimental

1.11 PRUEBAS DE HIPOTESIS.

Se realiza por partición de la suma de cuadrados total, correspondiente a las observaciones definidas en el experimento (Y_{ij}).

$$\Sigma\Sigma(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \Sigma\Sigma(Y_{ij} - \bar{Y}_{..} - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{i.})^2 \qquad |5|$$

$$= \Sigma\Sigma\{(Y_{ij} - \bar{Y}_{i}) + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})\}^2$$

$$= \Sigma\Sigma\{(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + 2(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})\}$$

$$= \Sigma\Sigma(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + \Sigma\Sigma(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + 2\Sigma\Sigma(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}$$

$$\Sigma\Sigma(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \Sigma\Sigma(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + n\Sigma(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \qquad |6|$$

El término que queda al lado izquierdo de la relación |6|, recibe el nombre de 'Suma de cuadrados del total', el primer término del lado derecho 'Suma de cuadrados del error' y el último término recibe el nombre de 'Suma de cuadrados de tratamientos'.

La suma de cuadrados del total se puede expresar también de la siguiente forma:

$$\Sigma\Sigma(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \Sigma\Sigma(Y_{ij}^2 + \bar{Y}_{..}^2 - 2Y_{ij}\bar{Y}_{..})^2$$

$$= \Sigma\Sigma Y_{ij}^2 + tn\bar{Y}_{..}^2 - 2\Sigma\Sigma Y_{ij}\bar{Y}_{..}$$

$$= \Sigma\Sigma Y_{ij}^2 + tn(\Sigma\Sigma Y_{ij})^2/(nt)^2 - 2\Sigma\Sigma Y_{ij}(\Sigma\Sigma Y_{ij}/nt)$$

$$= \Sigma\Sigma Y_{ij}^2 + (\Sigma\Sigma Y_{ij})^2/nt - 2(\Sigma\Sigma Y_{ij})^2/nt$$

$$\Sigma\Sigma(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \Sigma\Sigma Y^2_{ij} - (\Sigma\Sigma Y_{ij})^2/nt \qquad |7|$$

El primer término del lado derecho de la relación |7|, recibe el nombre de 'suma de cuadrados del total sin corregir', y el segundo término 'factor de corrección'.

En forma similar, para la 'suma de cuadrados de tratamientos' se puede conseguir otra relación simplificada.

$$n\Sigma(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = n\Sigma(\bar{Y}_{i.}^2 + \bar{Y}_{..}^2 - 2\bar{Y}_{i.}\bar{Y}_{..})$$

$$= n\Sigma\bar{Y}_{i.}^2 + nt\,\bar{Y}_{..}^2 - 2n\Sigma\bar{Y}_{i.}\bar{Y}_{..}$$

$$= n\Sigma(\Sigma Y_{ij})^2/n^2 + nt(\Sigma\Sigma Y_{ij})^2/(nt)^2 - 2n(\Sigma\Sigma Y_{ij}/n)(\Sigma\Sigma Y_{ij}/nt)$$

$$n\Sigma(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \Sigma(\Sigma Y_{ij})^2/n - (\Sigma\Sigma Y_{ij})^2/nt \qquad |8|$$

Es decir: la suma de cuadrados de tratamientos corregida por su media es igual a la suma de cuadrados de tratamientos sin corregir menos un factor de corrección.

En igual forma que |8| se desarrolla la suma de cuadrados del error;

$$\Sigma\Sigma(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 = \Sigma\Sigma Y_{ij}^2 - \Sigma\Sigma Y_{i.}^2/n \qquad |9|$$

1.12 ANALISIS DE VARIANZA.

Ronald A. Fisher define el análisis de varianza, como el proceso esencialmente aritmético de fraccionar, partir, la suma de cuadrados del total en componentes sumables y asociados a las fuentes de variación definidas en el diseño.

Usualmente se presenta en un cuadro que recibe el nombre de Análisis de Varianza donde las sumas de cuadrados pueden ser las relaciones definidas en |7|, |8| y |9|.

Cuadro 1.2 Fórmulas equivalentes para calcular las sumas de cuadrados de las correspondientes fuentes de variación.

Fuente de variación	Fórmulas de las sumas de cuadrados
Tratamientos	$n\Sigma(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$ ó $\Sigma Y_{i.}^2/n - (\Sigma\Sigma Y_{ij})^2/nt$
Error	$\Sigma\Sigma(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$ ó $\Sigma\Sigma Y_{ij}^2 - \Sigma Y_{i.}^2/n$
Total	$\Sigma\Sigma(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$ ó $\Sigma\Sigma Y_{ij}^2 - (\Sigma\Sigma Y_{ij})^2/nt$

2. DISEÑO IRRESTRICTAMENTE AL AZAR (D.I.A.)

2.1 D.I.A. CON IGUAL NUMERO DE OBSERVACIONES.

2.11 USOS: Se utiliza en experimento de laboratorio, invernadero; en general, donde las condiciones ambientales son relativamente homogéneos, también se utiliza en el campo en parcelas experimentales con características ambientales similares.

2.12 VENTAJAS: Es fácil de analizar puesto que extrae del error experimental la variación debida a tratamientos unicamente.

Permite el uso de un elevado número de tratamientos y gran número de repeticiones.

Los grados de libertad del error experimental, son generalmente altos de tal modo que garantizan la precisión del experimento; de hecho este diseño asegura el máximo número de grados de libertad para el error.

2.13 DESVENTAJAS: Si el número de tratamientos es elevado y el ensayo se realiza en el campo, se afronta el problema de la heterogenidad causada por el ambiente.

2.14 RESTRICCIONES: No existe ninguna restricción.

2.15 CROQUIS DE CAMPO: Los tratamientos y observaciones se asignan completamente al azar en el campo, usando la tabla de números al azar.

2.16 ILUSTRACION: Suponer una mesa de invernadero con 24 lugares para macetas de arcilla; se dese asignar, 4 tratamientos con 6 observaciones cada una, según el esquema siguiente:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	15
17	18	19	20
21	22	23	24

El procedimiento para sortear el experimento es elegir 2 columnas de la tabla de números al azar, anotar las cifras inferiores a 25 eliminando las repetidas.

No. al azar	Tratamiento
18	A
21	A
13	A
16	A
09	A
23	A
02	B
15	B
10	B
17	B
03	B
22	B
04	C
14	C
07	C
01	C
19	C
05	C
11	D
12	D
06	D
24	D
20	D
08	D

Modelo estadístico del D.I.A.: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$

Donde:

Y_{ij} = Observación individual

μ = Media

τ_i = Efecto de tratamiento, $i = \{1, 2, 3, \ldots\ldots., T\}$

ε_{ij} = Error experimental $j = \{1, 2, 3, \ldots\ldots., n\}$

a) Hipótesis:

$H_o : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots\ldots. = \mu_t$

$H_A : \mu_1 \neq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \neq \mu_t$ (Por lo menos existe diferencia entre dos medias).

b) Criterio de Prueba: Mediante la prueba de "F de Fisher"

$$F_c = \frac{\text{CM de tratamiento}}{\text{CM de error}}$$

Que se comparará con el correspondiente valor tabular de la Distribución "F de Fisher"; el numerador lleva los grados de libertad de tratamientos y el denominador los grados de libertad del error.

c) Cálculo de estimadores: en forma general se calculan los promedios de tratamientos, las sumas de cuadrados y los grados de libertad, con el cociente de sumas de cuadrados y grados de libertad se calculan los cuadrados medios y el cociente de 2 cuadrados medios define F_c.

d) Datos: La información numérica, se extrae del libro de campo y se presenta en forma de matriz de 2 dimensiones, los tratamientos se asignan a las hileras y las observaciones a las columnas.

Cuadro 2.1 Representación simbólica de los datos Y_{ij} como matriz.

TRATA-MIENTOS (i)	OBSERVACIONES (J)			SUMA $Y_{i.}$	MEDIA $\bar{Y}_{i..}$
A	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	$Y_{1.}$	$\bar{Y}_{1.}$
B	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	$Y_{2.}$	$\bar{Y}_{2.}$
C	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	$Y_{3.}$	$\bar{Y}_{3.}$
D	Y_{41}	Y_{42}	Y_{43}	$Y_{4.}$	$\bar{Y}_{4.}$
				$Y_{..}$	$\bar{Y}_{..}$

e) Análisis de varianza: éste diseño permite partir la variación total en 2 componentes: una atribuible a la variación entre tratamientos y la otra a la variación de las observaciones dentro de los tratamientos, tal como se presenta en la ilustración siguiente:

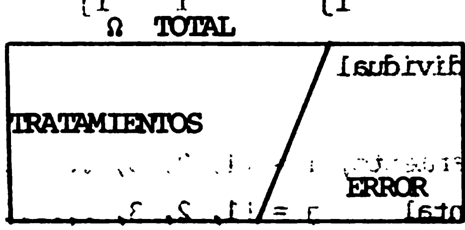

Figura 2.1 Rompimiento del total en dos componentes

Las sumas de cuadrados corregidas y los grados de libertad se calculan conforme a las relaciones [7], [8] y [9].

Cuadro 2.2 Análisis de varianza de irrestricto al azar.

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Tratamientos	$\Sigma Y_{i.}^2/n$ - FC	t - 1	SCT/GL	CMT/CME
Error	$\Sigma\Sigma Y_{ij}^2 - \Sigma Y_{i.}^2/n$	t(n-1)	SCE/GL	
Total	$\Sigma\Sigma Y_{ij}^2$ - FC	nt - 1		

f) Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente.

g) Decisión: Si $F_c > F_t$; es decir, F de la tabla de Fisher con (t-1) y t(n-1) grados de libertad; se detecta un resultado significativo al 5%.
Si $F_c \leq F_t$ tabular, se declara el resultado no significativo.

h) Conclusión: Se rechaza o acepta la H_o con base en las anteriores desigualdades.
El coeficiente de variación para este experimento es:

$$C.V. = \frac{\sqrt{CME}}{\bar{Y}..} \cdot 100$$

Ejemplo 2.1 De cierto experimento conducido en invernadero, se obtuvo los datos siguientes:

Cuadro 2.3 Peso de la materia seca de 5 variedades de frijol, a los 30 días de la germinación y por unidad experimental (grs).

TRATA-	OBSERVACIONES (j)						SUMAS	PROMED.
MIENTOS (i)	1	2	3	4	5	6	$Y_{i.}$	$\bar{Y}_{i.}$
A	2.9	3.5	4.1	3.9	3.0	3.5	20.90	3.48
B	3.0	3.6	3.7	3.8	3.1	3.3	20.50	3.42
C	3.1	3.8	4.2	3.1	3.5	3.2	20.90	3.48
D	4.5	4.4	3.8	4.7	4.1	5.0	26.50	4.42
D	6.5	8.0	7.4	7.0	8.0	7.0	43.90	7.32
							Y.. 132.70	$\bar{Y}$..4.42

Cuadro 2.4 Análisis de varianza irrestricto al azar

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Tratamiento	66.90	4	16.73	76.05 *
Parcela/trat.	5.39	25	0.22	
Total	72.29	29		

$$F.C. = Y^2../n.t = \frac{(132.70)^2}{30} = 586.98$$

Cálculo de las sumas de cuadrados. Por desarrollo de las relaciones |7|, |8| y |9|; la suma de cuadrados del error es igual que la suma de cuadrados de parcelas dentro de tratamientos (S.C. parc/trat.).

$$\text{S.C. Tratamientos} = \frac{(20.9)^2 + \ldots\ldots\ldots + (43.90)^2}{6} - FC = 66.90$$

$$\text{SC. Parc/tratam.} = (2.9)^2 + \ldots + (7.0)^2 - \frac{20.9^2 + \ldots + 43.9^2}{6} = 5.39$$

$$\text{S.C. Total} = (2.9)^2 + \ldots\ldots\ldots + (7.0)^2 - FC = 5.39$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$

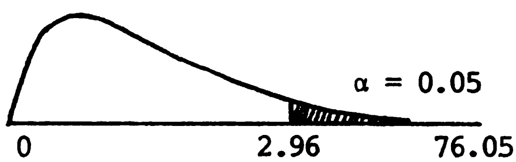

Figura 2.2 Distribución de F con 4 y 25 grados de libertad.

La figura anterior resalta que la probabilidad de obtener un resultado $F > 76.05$ es bajísimo, se encuentra en la cola derecha de la distribución ($P < 0.001$), consecuentemente, se declara a este resultado altamente significativo, que induce a rechazar la hipótesis nula planteada en el experimento. Se concluye afirmando que, por lo menos existe una diferencia significativa entre 2 promedios, atribuible al efecto del tratamiento.

2.2 D.I.A. CON DIFERENTE NUMERO DE OBSERVACIONES POR TRATAMIENTO.

La pérdida de unidades experimentales o desigual número de observaciones no complica el análisis del D.I.A. en efecto se utilizan definiciones generalizadas para la suma de cuadrados y grados de libertad.

Cuadro 2.5 Representación simbólica de los datos experimentales

Tratamientos (i)	OBSERVACIONES (j)				$n_{i.}$	$Y_{i.}$
T_1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	4	$Y_{1.}$
T_2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}		3	$Y_{2.}$
T_3	Y_{31}	Y_{32}			2	$Y_{3.}$
T_t						
					$n_{..}$ 9	$Y_{..}$

Cuadro 2.6 Análisis de varianza irrestricto al azar parcelas perdidas ó desigual número de observaciones por tratamiento.

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	F_c
Tratamiento	$\Sigma t - 1$	$\Sigma Y_{i.}^2/n_{i.} - FC$	SCT/GL	CMT/CME
Error	$\Sigma p - \Sigma t$	$\Sigma\Sigma Y_{ij}^2 - \Sigma Y_{i.}^2/n_{i.}$	SCE/GL	
Total	$\Sigma p - 1$	$\Sigma\Sigma Y_{ij}^2 - FC$		

Σt = total de tratamientos en el experimento
Σp = total de parcelas en el experimento

Ejemplo 2.2 Suponer que en el anterior ejemplo se perdió la información de 8 unidades experimentales

Cuadro 2.7 Peso de la materia seca de frijol a los 30 días. (grs)

TRATA-	OBSERVACIONES (j)						No.	SUMA	MEDIA
MIENTOS (i)	1	2	3	4	5	6	$n_{i.}$	$Y_{i.}$	$\bar{Y}_{i.}$
A	2.9	3.5	4.1	3.9	3.0	3.5	6	20.90	3.48
B	3.0	3.6	3.7				3	10.30	3.42
C	3.3	3.8	4.2	3.1	3.5	3.2	6	21.10	3.52
D	4.5	4.4	3.8	4.7	4.7		5	22.10	4.42
E	8.1	8.0					2	16.10	8.05
							22	$Y_{..}$ 90.50	$\bar{Y}_{..}$ 4.11

Cuadro 2.8 Análisis de varianza irrestrictamente al azar con desigual número de observaciones por tratamiento

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Tratamiento	37.37	4	0.34	54.94 *
Parcelas/trat.	2.84	17	0.17	
Total	40.21	21		

$$F.C. = \frac{Y_{..}^2}{n} = 372.28$$

$$S.C.\ Trat = \frac{(20.90)^2}{6} + \frac{(10.30)^2}{3} + \frac{(21.10)^2}{6} + \frac{(22.10)^2}{5} + \frac{(16.10)^2}{2} - FC$$

$$= 409.65 - 372.28 = 37.37$$

$$SC\ Parc/t = (2.9)^2 + (3.5)^2 + \ldots\ldots\ldots + (80)^2 - 409.65$$

$$= 412.49 - 409.65 = 2.84$$

$$\text{S.C. Total} = (2.9)^2 + (3.5)^2 + \ldots\ldots. + (80)^2 - FC$$
$$= 412.49 - 372.28 = 40.21$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$

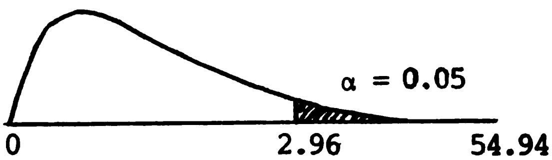

Figura 2.3 Distribución de F con 4 y 17 grados de libertad

La figura anterior destaca que, la probabilidad de obtener un valor de $F > 54.94$ es bajísima ($P < 0.001$). Implica un resultado altamente significativo e induce a rechazar la hipótesis de nulidad. Se concluye que por lo menos existe una diferencia significativa entre 2 promedios, atribúible al efecto del tratamiento.

2.3 D.I.A. CON MUESTREO.

Supongamos una parcela sembrada de pasto, en la cual no se mide toda la parcela sino se hace un muestreo.

Cuadro 2.9 Representación simbólica de los datos.

TRATAMIENTOS	OBSERVACIONES (J) 1		2		3			
	MUESTREOS (K)							
(i)	1	2	1	2	1	2	$Y_{i..}$	$\bar{Y}_{i..}$
T_1	Y_{111}	Y_{112}	Y_{121}	Y_{122}	Y_{131}	Y_{132}		
	$Y_{11.}$		$Y_{12.}$		$Y_{13.}$		$Y_{1..}$	$\bar{Y}_{1..}$
T_2	Y_{211}	Y_{212}	Y_{221}	Y_{222}	Y_{231}	Y_{232}		
	$Y_{21.}$		$Y_{22.}$		$Y_{23.}$		$Y_{2..}$	$\bar{Y}_{2..}$
T_3	Y_{311}	Y_{312}	Y_{321}	Y_{322}	Y_{331}	Y_{332}		
	$Y_{31.}$		$Y_{32.}$		$Y_{33.}$		$Y_{3..}$	$\bar{Y}_{3..}$
							$Y_{...}$	$\bar{Y}_{...}$

Modelo estadístico: Se define una nueva fuente de variación debido a muestreo.

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \lambda_{ijk}$$

Donde:

Y_{ijk} = Una observación cualquiera

τ_i = iésimo tratamiento $i = \{1, 2, \ldots\ldots, t\}$

μ = Media común

ε_{ij} = Error experimental $j = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$

λ_{ijk} = Error de muestreo $k = \{1, 2, \ldots\ldots, m\}$

Análisis de varianza. Este diseño parte la variación total en 3 componentes: variación debida a tratamientos, a parcelas dentro de tratamientos y a muestras dentro de parcelas; el error experimental, queda definido por la fuente de variación debido a parcelas dentro de tratamientos según el esquema siguiente:

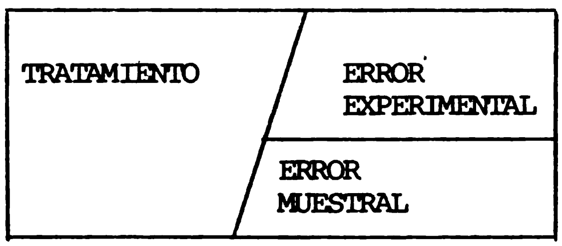

Figura 2.4 Rompimiento del total en 3 componentes.

Cuadro 2.10 Análisis de varianza con muestreo

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{i..}/n\,m - FC$	$t - 1$	SCT/GL	CMT/CME
Parc/trat	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij.}/m - \Sigma Y^2_{i..}/n\,m$	$t(n-1)$	SCE/GL	
Muest/parc.	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk} - \Sigma\Sigma Y^2_{ij.}/m$	$nt(m-1)$	SCM/GL	
Total	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk} - FC$			

El coeficiente de variación se calcula con la relación:

$$CV = \frac{\sqrt{\text{CM Parcela dentro de tratamientos}}}{\bar{Y}\ldots} \cdot 100$$

Ejemplo 2.3 En otro experimento conducido en invernadero, se tomó lecturas en duplicado para cada unidad experimental.

Cuadro 2.11 Análisis foliar de 3 variedades de frijol, contenido Mg en (p.m.)

TRATA-MIENTOS (i)	OBSERVACIONES (MACETAS) (J)								SUMA	MEDIA
	1		2		3		4			
	MUESTRA DUPLICADA (HOJAS) (K)									
	1	2	1	2	1	2	1	2	$Y_{i..}$	$\bar{Y}_{i..}$
t_8	3.3	3.5	3.5	3.6	4.1	3.7	3.9	3.8		
	6.8		7.1		7.8		7.7		29.40	3.68
t_{10}	5.0	3.9	4.4	4.6	3.8	5.1	4.7	4.2		
	8.9		9.0		8.9		8.9		35.70	4.46
t_{12}	8.0	8.1	7.9	8.0	7.0	7.4	7.8	7.0		
	16.1		15.9		14.4		14.8		61.20	7.65
									126.30	5.26

Cuadro 2.12 Análisis de varianza irrestricto al azar con muestreo

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Tratamiento	70.89	2	35.45	236.33
Parcela/trat.	1.38	9	0.15	
Muestra/parc.	2.11	12	0.18	
Total	74.38	23		

$$F.C. = \frac{Y^2_{...}}{tnm} = 664.65 \qquad t = 3\ ; \quad n = 4\ ; \quad m = 2$$

Cálculo de las sumas de cuadrados. La suma de cuadrados del error experimental sigue siendo la suma de cuadrados de parcelas dentro de tratamiento (Parcela/trat.); y la suma de cuadrados del error muestral es la suma de cuadrados de muestras dentro de parcelas (Muestra/parc); esta distinción es fundamental para el cálculo de F_c.

$$\text{S.C. Tratamientos} = \frac{(29.4)^2 + (35.7)^2 + (61.2)^2}{8} - FC$$

$$= 735.54 - 664.65 = 70.89$$

$$\text{SC. Parc/trat.} = \frac{(6.8)^2 + \ldots\ldots\ldots + (14.8)^2}{2} - 735.54$$

$$= 736.92 - 735.54 = 1.38$$

$$\text{SC Muestra/Parc.} = (3.3)^2 + (3.5)^2 + \ldots\ldots\ldots + (7.0)^2 - 736.92$$

$$= 793.03 - 736.92 = 2.11$$

$$\text{S.C. Total} = (3.3)^2 + (3.5)^2 + \ldots\ldots\ldots + (7.0)^2 - FC$$

$$= 739.03 - 664.65 = 74.38$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente.

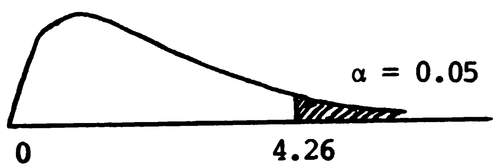

Figura 2.5 Distribución de F con 2 y 9 grados de libertad

La figura anterior destaca que, la probabilidad de obtener un valor de $F > 236.33$ es bajísima ($P < 0.001$). Implica un resultado altamente significativo e induce a rechazar la hipótesis de nulidad. Se concluye que por lo menos existe una diferencia significativa entre 2 promedios atribuible al efecto del tratamiento.

2.4 D.I.A. CON MUESTREO Y DIFERENTE NUMERO DE OBSERVACIONES.

Si el D.I.A. con muestreo tiene desigual número de observaciones por parcelas perdidas ó diferente número de observaciones por tratamiento se utiliza, fórmulas generalizadas que se obtienen de la tabulación de los datos en los cuadros siguientes:

CUADRO 2.13 Datos tabulados para las sumas y cálculos de las sumas de cuadrados sin corregir.

TRATA-MIENTOS (i)	OBSERVACIONES (J) 1		2		3			
	MUESTREO (K) 1	2	1	2	1	2	$Y_{i..}$	$\bar{Y}_{i..}$
T_1	Y_{111}	Y_{112}	Y_{121}	Y_{122}	Y_{131}	Y_{132}		
	$Y_{11.}$		$Y_{12.}$		$Y_{13.}$		$Y_{1..}$	$\bar{Y}_{1..}$
T_2	Y_{211}	Y_{212}	Y_{221}	Y_{222}				
	$Y_{21.}$		$Y_{22.}$				$Y_{2..}$	$\bar{Y}_{2..}$
T_3	Y_{311}	Y_{312}	Y_{321}	Y_{322}				
	$Y_{31.}$		$Y_{32.}$				$Y_{3..}$	$\bar{Y}_{3..}$
							$Y_{...}$	$\bar{Y}_{...}$

Cuadro 2.14 Número de observaciones y sumas de las mismas para usar como denominadores de las sumas de cuadrados sin corregir.

TRATA-MIENTO (i)	OBSERVACIONES (J) 1		2		2		
	MUESTREO (K) 1	2	1	2	1	2	$n_{i..}$
T_1	n_{111}	n_{112}	n_{121}	n_{122}	n_{131}	n_{132}	
	$n_{11.}$		$n_{12.}$		$n_{13.}$		$n_{1..}$
T_2	n_{211}	n_{212}	n_{221}	n_{222}			
	$n_{21.}$		$n_{22.}$				$n_{2..}$
T_3	n_{311}	n_{312}	n_{321}	n_{322}			
	$n_{31.}$		$n_{32.}$				$n_{3..}$
							$n_{...}$

Modelo estadístico: no cambia a causa del desequilibrio por parcelas faltantes.

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \lambda_{ijk}$$

Cuadro 2.15 Análisis de varianza con muestreo y desigual número de parcelas y muestras de diferente tamaño.

F.V.	S.C.	G.L.
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{i..}/n_{i..} - FC$	$\Sigma t - 1$
Parcela/tratamiento	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij.}/n_{ij} - \Sigma Y^2_{i..}/n_{i..}$	$\Sigma p - \Sigma t$
Muestreo/parcela	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk} - \Sigma\Sigma Y^2_{ij.}/n_{ij.}$	$\Sigma m - \Sigma p$
Total	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk} - FC$	$\Sigma m - 1$

Σt = total de tratamientos en el experimento

Σp = total de unidades (parcelas) experimentales en el experimento

Σm = total de unidades muestrales (subparcelas) en el experimento

Ejemplo 2.4 Suponer que en el anterior ejemplo (No. 3) se perdió la información de 3 unidades experimentales.

Cuadro 2.16 Análisis foliar de 3 variedades de frijol, contenido de Mg (p.m.)

TRATA- MIENTOS	OBSERVACIONES (MACETAS) (J)									
	1		2		3		4			
	MUESTRA DUPLICADA (PLANTAS) (K)								SUMA	MEDIA
(i)	1	2	1	2	1	2	1	2	$Y_{i..}$	$\bar{Y}_{i..}$
t_8	3.3	3.5	3.5	3.6	4.1	3.7	3.9	3.8		
	6.8		7.1		7.8		7.7		29.40	3.69
t_{10}	5.0	3.9	4.4	4.6	3.8	5.1				
	8.9		9.0		8.9				26.80	4.47
t_{12}	8.0	8.1	7.9	8.0						
	16.1		15.9						32.00	8.00
									88.20	5.38

Cuadro 2.17 Análisis de varianza de irrestricto al azar con muestreo y desigual número de observaciones

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Tratamiento	51.58	2	25.79	429.83*
Parcela / trat.	0.35	6	0.06	
Muestreo/Parcela	1.59	9	0.18	
Total	53.52	17		

$$F.C. = \frac{Y^2_{...}}{18} = 432.18$$

$$S.C.\ Tratamiento = \frac{(29.40)^2}{8} + \frac{(26.80)^2}{6} + \frac{(32.00)^2}{4} - FC$$

$$= 483.76 - 432.18 = 51.58$$

$$SC\ Parcela/trat. = \frac{(6.8)^2 + \dots\dots\dots\dots + (15.9)^2}{2} - 483.76$$

$$= 484.11 - 483.76 = 0.35$$

$$SC\ Muestra/Parc. = (3.3)^2 + \dots\dots\dots\dots + (8.0)^2 - 484.11$$

$$= 485.70 - 484.11 = 1.59$$

$$SC\ Total = (3.3)^2 + \dots\dots\dots\dots + (8.0)^2 - FC$$

$$= 485.70 - 432.18 = 53.52$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente

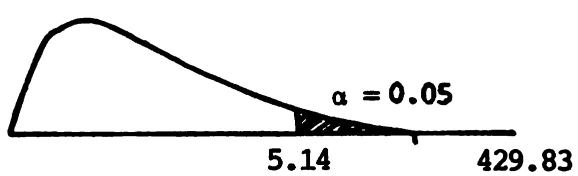

Figura 2.6 Distribución de F con 2 y 6 grados de libertad.

La figura anterior destaca que, la probabilidad de obtener un valor $F > 429.83$ es bajísima ($P < 0.001$). Implica un resultado altamente significativo e induce a rechazar la hipótesis de nulidad. Se concluye que por lo menos existe una diferencia significativa entre 2 promedios, atribuible al efecto del tratamiento.

2.5 D.I.A. CON SUB MUESTREO.

El sub muestreo se origina como consecuencia de volver a tomar muestras de una muestra; es decir, se establece la jerarquía siguiente: tratamientos, parcelas dentro de tratamientos, muestra dentro de parcela y sub muestra dentro de muestra.

Los datos se tabulan en la forma siguiente:

Cuadro 2.18 Representación simbólica de datos con sub muestreo.

TRATA-MIENTOS (i)	OBSERVACIONES (J)					
	1					
	MUESTREOS (K) 1		2			
	SUBMUESTREO (ℓ) 1	2	1	2	$Y_{i...}$	$\bar{Y}_{i...}$
	Y_{1111}	Y_{1112}	Y_{1121}	Y_{1122}		
	$Y_{111.}$		$Y_{112.}$			
	$Y_{11..}$				$Y_{1...}$	$\bar{Y}_{1...}$
					$Y_{....}$	$\bar{Y}_{....}$

Modelo estadístico. Debe incluir la nueva fuente de variación debido a sub muestreo

$$Y_{ijk\ell} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \lambda_{ijk} + \theta_{ijk\ell}$$

Donde:

$\theta_{ijk\ell}$= error de submuestreo $\ell = \{1, 2, 3, \ldots\ldots., s\}$

Cuadro 2.19 Análisis de varianza con sub muestreo

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	Fc
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{i...}/nms - FC$	$(t - 1)$	SCT/GL	CMT/CME
Error Exp.	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij..}/ms - \Sigma Y^2_{i...}/nms$	$t(n-1)$	SCE/GL	
Error Muestra	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk.}/s - \Sigma\Sigma Y^2_{ij..}/ms$	$nt(m-1)$	SCM/GL	
Error Submuestra	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell} - \Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk.}/s$	$mnt(s-1)$	SCS/GL	
Total	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell} - FC$	$mnts - 1$		

Ejemplo 2.5 En otro experimento conducido en invernadero se tomó lecturas por duplicado (2 hojas) dentro un duplicado de plantas (2 plantas por parcela experimental).

Cuadro 2.20 Análisis foliar de hojas de café, contenido P (p.m.)

TRATA-	No. de Macetas (J) 1				2					
MIENTO	1 PLANTA		2		1 PLANTA		2 (K)		SUMA	MEDIA
(i)	1 HOJA	2	1 HOJA	2	1 HOJA	2	1 HOJA	2	$Y_{i...}$	$\bar{Y}_{i...}$
t_8	3.0	3.5	3.5	3.6	4.1	3.7	3.9	3.8		
	6.5		7.1		7.8		7.7			
	13.6				15.50				29.10	3.64
t_{10}	5.0	3.9	4.4	4.6	3.8	5.1	4.7	4.2		
	8.9		9.0		8.9		8.9			
	17.9				17.80				35.70	4.46
t_{12}	8.0	8.1	7.9	8.0	7.0	7.4	7.8	7.0		
	16.1		15.9		14.4		14.8			
	32.0				29.2				61.20	7.65
									Y....126.00	5.25

Cuadro 2.21 Análisis de varianza irrestricto al azar con sub muestreo

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Tratamiento	71.84	2	35.92	74.83*
Parcela / trat.	1.43	3	0.48	
Muestreo / Parc.	0.19	3	0.03	
Submuestreo/muest.	2.18	12	0.18	
Total	75.64	23		

$$F.C. = \frac{Y^2_{....}}{n_{....}} = 661.50$$

Cálculo de las sumas de cuadrados. El error es igual a la suma de cuadrados de submuestra dentro de muestreo.

$$\text{S.C. Tratam.} = \frac{(29.10)^2 + (35.70)^2 + (61.20)^2}{8} - FC$$

$$= 733.34 - 661.50 = 71.84$$

$$\text{SC Parc/trat.} = \frac{(13.6)^2 + (15.5)^2 + (17.9)^2 + (17.8)^2 + (32.0)^2 + (29.2)^2}{4}$$

$$= 737.77 - 733.34 = 1.43$$

$$\text{SC Muest/Parc.} = \frac{(6.5)^2 + (7.1)^2 + \ldots\ldots. + (14.8)^2}{8} - 734.77$$

$$= 734.96 - 734.77 = 0.18$$

$$\text{SC Sub/Muest.} = (3.0)^2 + (3.5)^2 + \ldots\ldots\ldots + (7.0)^2 - 734.96$$

$$= 737.14 - 734.96 = 2.18$$

$$\text{S.C. Total} = 737.14 - 661.50 = 75.64$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente.

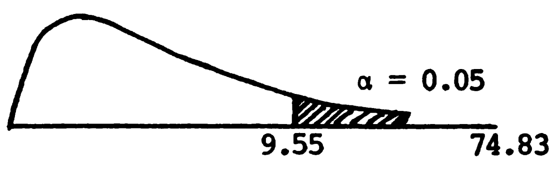

Figura 2.7 Distribución de F con 2 y 3 grados de libertad

La figura anterior destaca que, la probabilidad de obtener un valor $F > 74.83$ es bajísima ($P < 0.001$). Implica un resultado altamente significativo e induce a rechazar la hipótesis de nulidad. Se concluye que por lo menos existe una diferencia significativa entre 2 promedios, atribuible al efecto del tratamiento.

2.6 D.I.A. CON SUB MUESTREO Y DESIGUAL NUMERO DE OBSERVACIONES

Es aplicable a experimento con sub muestreo y parcela perdida o desigual número de parcelas experimentales por tratamiento, para el cálculo de la suma de cuadrados y grados de libertad por fórmulas generalizadas es necesario construir los cuadros siguientes:

Cuadro 2.22 Representación simbólica de datos con submuetreo y desigual número de observaciones

TRATA- MIENTOS (i)	OBSERVACIONES (J) 1				2		$Y_{i...}$	$\bar{Y}_{i...}$
	MUESTRAS (K) 1		2		1			
	SUB MUESTRA (ℓ) 1	2	1	2	1	2		
T_1	Y_{1111}	Y_{1112}	Y_{1121}	Y_{1122}	Y_{1211}	Y_{1212}		
	$Y_{111.}$		$Y_{112.}$		$Y_{121.}$			
	$Y_{11..}$						$Y_{1...}$	$\bar{Y}_{1...}$
T_2	Y_{2111}	Y_{2112}	Y_{2121}	Y_{2122}				
	$Y_{211.}$		$Y_{212.}$					
	$Y_{21..}$						$Y_{2...}$	$\bar{Y}_{2...}$
							$Y_{....}$	$\bar{Y}_{....}$

Cuadro 2.23 Representación simbólica del número de observaciones

TRATA- MIENTOS (i)	OBSERVACIONES (J) 1						$n_{i..}$
	MUESTRAS (K) 1		2		1		
	SUB MUESTRA (ℓ) 1	2	1	2	1	2	
	n_{1111}	n_{1112}	n_{1121}	n_{1122}	n_{1211}	n_{1212}	
	$n_{111.}$		$n_{112.}$		$n_{122.}$		
	$n_{11.}$						$n_{1...}$
							$n_{....}$

Cuadro 2.24 Análisis de varianza con sub-muestreo y desigual número de observaciones

F.V.	S.C.	G.L.
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{i...}/n_{i...} - FC$	$\Sigma t - 1$
Parcela/trat.	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij..}/n_{ij..} - \Sigma Y^2_{i...}/n_{i...}$	$\Sigma p - \Sigma t$
Muestreo/parc.	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk.}/n_{ijk.} - \Sigma\Sigma Y^2_{ij..}/n_{ij..}$	$\Sigma m - \Sigma p$
Sub muestra/muest.	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell} - \Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk.}$	$\Sigma s - \Sigma m$
Total	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell}$	$\Sigma s - 1$

Para los grados de libertad se define: Σs como el total de unidades sub-muestrales en el experimento, Σm, Σp, Σt fueron definidos anteriormente.

Ejemplo 2.6 En otro experimento conducido en invernadero se tomó lecturas por duplicado (2 hojas) dentro un duplicado de plantas (2 plantas por parcela experimental). Se perdieron 6 parcelas en total.

Cuadro 2.25 Análisis foliar de hojas de café, contenido de P (p.mm.)

TRATA-MIENTO (i)	No. de Macetas (J) 1				2				SUMA	MEDIA
	PLANTA 1		PLANTA 2		PLANTA 1		PLANTA 2 (K)			
	HOJA 1	HOJA 2	HOJA 1	HOJA 2	HOJA 1	HOJA 2	HOJA 1	HOJA 2	$Y_{i...}$	$\bar{Y}_{i...}$
t_8	3.0	3.5	3.5	3.6	4.1	3.7	3.9			
	6.5		7.1		7.8		3.9			
	13.6				11.7				25.3	3.61
t_{10}	5.0	3.9	4.4	4.6	3.8					
	8.9		9.0		3.8					
	17.9				3.8				21.7	4.34
t_{12}	8.0	8.1	7.9	8.0	7.0	7.4				
	16.1		15.9		14.4					
	32.0				14.4				46.4	7.73
									93.4	5.19

Cuadro 2.26 Análisis de varianza irrestricto al azar con sub muestreo y desigual número de observaciones.

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Tratamiento	59.803	2	29.902	54.56
Parcela/trat.	1.646	3	.548	
Muestra/Parc.	0.103	4	.025	
Sub muestra/Muest.	0.925	8	.116	
Total	62.477	17		

$$\text{F.C.} = \frac{Y^2_{\cdots}}{n_{\cdots}} = \frac{93.4}{18} = 484.6422$$

$$\text{S.C. Tratam} = \frac{(25.30)^2}{7} + \frac{(21.7)^2}{5} + \frac{(46.4)^2}{6} - \text{FC}$$

$$= 544.4461 - 484.6422 = 59.8039$$

$$\text{SC Parc/trat.} = \frac{13.6^2}{4} + \frac{11.7^2}{3} + \frac{17.9^2}{4} + 3.8^2 + \frac{3.2^2}{4} + \frac{14.4^2}{2} - 544.4461$$

$$= 546.0925 - 544.4461 = 1.6464$$

$$\text{SC Muest/Parc} = \frac{6.5^2 + 7.1^2 + \ldots\ldots\ldots + 14.4^2}{2} - 546.0925$$

$$= 546.1950 - 546.0925 = 0.1025$$

$$\text{SC Sub/Parc} = (3.0)^2 + (3.5)^2 + \ldots\ldots\ldots + (7.0)^2 - 546.1950$$

$$= 547.12 - 546.1950 = 0.925$$

$$\text{S.C. Total} = 547.12 - \text{FC} = 62.4778$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente

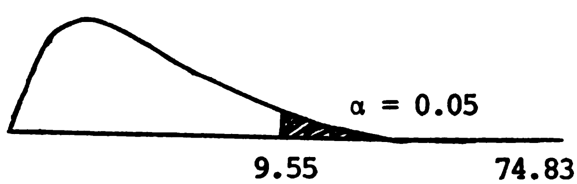

Figura 2.8 Distribución de F con 2 y 3 grados de libertad

La figura anterior destaca que, la probabilidad de obtener un valor F > 74.83 es bajísima (P<0.001). Implica un resultado altamente significativo e induce a rechazar la hipótesis de nulidad. Por lo menos existe un diferencia significativa entre 2 promedios, atribuible al efecto del tratam.

2.7 D.I.A. CON SUB SUB MUESTREO.

Los datos se tabulan en la forma siguiente:

Cuadro 2.27 Datos simbólicos para experimentos con sub-sub-muestreo

TRATAMIENTO (i)	OBSERVACIONES (J) 1							
	MUESTREO (K) 1				2			
	SUB-MUESTREO (ℓ) 1		2		1			
	SUB-SUB-MUESTREO (ψ) 1	2	1	2	1	2	$Y_{i....}$	$\bar{Y}_{i....}$
T_1	Y_{11111}	Y_{11112}	Y_{11121}	Y_{11122}	Y_{11211}	Y_{11212}		
	$Y_{1111.}$		$Y_{1112.}$		$Y_{1121.}$			
	$Y_{111..}$							
	$Y_{11...}$						$Y_{1....}$	$\bar{Y}_{1....}$
T_i	$Y_{21...}$						$Y_{2....}$	$\bar{Y}_{2....}$
							$Y_{.....}$	$\bar{Y}_{.....}$

Modelo estadístico:

$$Y_{ijk\ell h} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \lambda_{ijk} + \theta_{ijk\ell} + \psi_{ijk\ell h}$$

$\psi_{ijk\ell h}$ = error de sub muestra $h = \{1, 2, 3, ..., w\}$

Cuadro 2.28 Análisis de varianza

F.V.	S.C.	G.L.
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{i....}/nmsw - FC$	$(t - 1)$
Parcela/trat.	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij...}/nsw - \Sigma Y^2_{i....}/nmsw$	$t(n - 1)$
Muestreo/parc.	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk..}/sw - \Sigma\Sigma Y^2_{ij...}/msw$	$nt(m - 1)$
Sub muest/Muest.	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell.}/w - \Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk..}/sw$	$mnt(s - a)$
Sub-Sub/sub.	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell h} - \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell.}/w$	$smnt(w - 1)$
Total	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell h} - FC$	$smntw - 1$

2.8 D.I.A. CON SUB SUB MUESTRA Y DESIGUAL NUMERO DE OBSERVACIONES.

Los datos se tabulan en forma similar al sub sub muestreo con igual número de observaciones. Se tabula un nuevo cuadro para utilizar fórmulas generalizadas en las sumas de cuadrados.

Cuadro 2.29 Representación simbólica de datos experimentales desequilibrado.

	OBSERVACIONES (J) 1						
	MUESTREO (K)						
	1				2		
	SUB MUESTREO (ℓ)						
TRATA-	1		2		1		
MIENTO	SUB SUB MUESTREO (h)						
(i)	1	2	1	2	1	2	$n_{i....}$
T_1	n_{11111}	n_{11112}	n_{11121}	n_{11122}	n_{11211}	n_{11212}	
	$n_{1111.}$		$n_{1112.}$		$n_{1121.}$		
	$n_{111..}$						
	$n_{11...}$						$n_{1....}$
	$n_{21...}$						$n_{2....}$
							$n_{.....}$

Cuadro 2.30 Análisis de varianza con sub sub muestreo y desigual número de observaciones

F.V.	S.C.	G.L.
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{i....}/n_i - FC$	$\Sigma t - 1$
Error Exp.	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij...}/n_{ij} - \Sigma Y^2_{i....}/n_i$	$\Sigma p - \Sigma t$
Muestreo	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk..}/n_{ijk} - 2\Sigma Y^2_{ij...}/n_{ij}$	$\Sigma m - \Sigma p$
Sub muestra	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell.} - \Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk..}/n_{ijk}$	$\Sigma s - \Sigma m$
Sub sub/sub	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell h} - \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell.}$	$\Sigma w - \Sigma s$
Total	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell h} - FC$	$\Sigma w - 1$

Σw es el total de unidades submuestrales en el experimento, los otros símbolos usados en los G.L. fueron definidos anteriormente.

3. BLOQUES AL AZAR.

3.1 B.A. CON IGUAL NUMERO DE OBSERVACIONES POR TRATAMIENTO.

3.11 USOS: En muchas situaciones, se conoce de antemano que algunas parcelas experimentales aunque lleven el mismo tratamiento tendrán un comportamiento diferente, como ocurre en campos experimentales con marcado desnivel o próximos a una fuente acuífera; bajo estas condiciones 2 parcelas contíguas serán mucho más consistentes entre sí que 2 parcelas alejadas. El B.A. se usa por tanto, donde las unidades experimentales pueden agruparse en bloques relativamente homógeneos tal que las diferencias observadas entre unidades sean primordialmente debidas a los tratamientos.

3.12 VENTAJAS: Es fácil de analizar; extrae del error experimental la debida a los bloques además de la variación debida a tratamientos.

3.13 DESVENTAJAS: Menor número de grados de libertad para el error experimental.

Si el número de tratamientos es muy elevado, por ejemplo 25, es difícil conseguir un buen agrupamiento de las parcelas experimentales.

3.14 RESTRICCIONES: Cada bloque debe contener los tratamientos asignados al azar.

3.15 CROQUIS DE CAMPO: Los tratamientos se asignan a las parcelas utilizando la tabla de números al azar separadamente en cada bloque, no es indispensable que los bloques estén contíguos.

3.16 ILUSTRACION: Tres bloque y 6 tratamientos.

I	d	e	a	c	b	f		
II	f	a	e	b	c	d		
III				a	c	b	f	d	e

Modelo estadístico:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

Donde:

μ = Media común

τ_i = Efecto del iésimo tratamiento $i = \{1, \ldots\ldots., t\}$

β_j = Efecto del iésimo bloque $j = \{1, \ldots\ldots., n\}$

ε_{ij} = Error experimental

a) Hipótesis considerada:

$H_o : \mu_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \mu_t$

H_A : Por lo menos existe diferencia entre 2 medias.

b) Criterio de prueba: Mediante la prueba de "F de Fisher" que utiliza la distribución del mismo nombre con grados de libertad de tratamientos y error y bloque también con el error.

$$F_c = \frac{\text{CM tratamiento}}{\text{CM del error}} \quad ; \quad F_c = \frac{\text{CM bloque}}{\text{CM error}}$$

c) Cálculo de estimadores: $\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$, ..., $\bar{Y}_t$; S.C., C.M., F_0.

d) Datos: La información que se extrae del libro de campo se tabula en forma de matriz de 2 dimensiones asignando las hileras a los tratamientos y las columnas a los bloques.

Cuadro 3.1 Tabulación de datos.

TRATAMIENTOS (i)	BLOQUES (j) B_1	B_2	....	B_n	SUMA $Y_{i.}$	MEDIA $\bar{Y}_{i.}$
T_1	Y_{11}	Y_{12}	....	Y_{1n}	$Y_{1.}$	$\bar{Y}_{1.}$
T_2	Y_{21}	Y_{22}			$Y_{2.}$	$\bar{Y}_{2.}$
			Y_{ij}			
T_t	Y_{t1}	Y_{t2}	....	Y_{tn}	$Y_{t.}$	$\bar{Y}_{t.}$
$Y_{.j}$	$Y_{.1}$	$Y_{.2}$		$Y_{.n}$	$Y_{..}$	$\bar{Y}_{..}$

e) Análisis de varianza. Este diseño fracciona la variación total en 3 componentes: la debida a bloques, a tratamientos y al error experimental como se esquematiza en la figura siguiente:

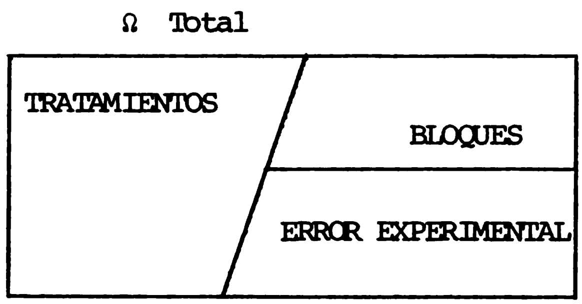

Figura 3.1 Partición en 3 componentes

Las sumas de cuadrados, los grados de libertad, los cuadrados medios y F_c se calculan y presentan como en el cuadro siguiente:

Cuadro 3.2 Análisis de varianza en bloques al azar.

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Bloque	$\Sigma Y^2_{.j}/t - FC$	$n - 1$	SCB/GL	CMB/CME
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{i.}/n - FC$	$t - 1$	SCT/GL	CMT/CME
Error Exp.	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij} - \Sigma Y^2_{.j}/t - \Sigma Y^2_{i.}/n + FC$	$(n-1)(t-1)$	SCE/GL	
Total	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij} - FC$	$nt - 1$		

f) Nivel de significación: Usualmente se elige $\alpha = 0.05$ aunque también se puede someter a prueba la hipótesis para $\alpha = 0.025$ ó $\alpha=0.10$.

g) Decisión: Si F_c de tratamiento es mayor que el valor tabular correspondiente, se declara el resultado significativo; de otro modo si $F_c \leq F_t$, se declara el resultado no significativo.

h) Conclusión: Se realiza la aceptación o rechazo de la H_o, el coeficiente de variación se calcula como en el D.I.A.

$$C.V. = \frac{\sqrt{CME}}{Y..} \cdot 100$$

Ejemplo 3.1 Suponer los datos de un experimento conducido en el campo en bloques al azar.

Cuadro 3.3 Rendimiento de 10 variedades de frijol (kg/parcela de $10m^2$)

TRATAMIENTOS	BLOQUES A	B	C	D	E	SUMA $Y_{i.}$	MEDIA $\bar{Y}_{i.}$
1	1.51	2.00	2.02	1.15	1.22	7.90	1.58
2	1.72	1.75	2.04	1.25	1.02	7.78	1.56
3	1.75	1.60	2.25	1.54	1.35	8.49	1.70
4	1.76	1.50	2.29	1.50	1.45	8.50	1.70
5	1.79	1.75	2.40	1.53	1.55	9.02	1.80
6	2.00	1.80	2.45	1.58	1.32	9.15	1.83
7	2.05	1.77	2.30	1.70	1.52	9.34	1.87
8	2.10	1.78	2.42	1.82	1.65	9.77	1.95
9	2.15	1.79	2.67	1.89	2.21	10.71	2.14
10	2.16	1.81	2.78	2.25	2.31	11.31	2.26
$Y_{.j}$	18.99	17.55	23.62	16.21	15.60	91.97	1.84

Cuadro 3.4 Análisis de varianza de bloques al azar

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Bloques	4.09	4	1.02	20.40 *
Tratamiento	2.36	9	0.26	5.20 *
Error	1.84	36	0.05	
Total	8.29	49		

$$F.C. = \frac{Y_{..}^2}{tn} = 169.17$$

$$S.C.\ bloques = \frac{(18.99)^2 + \ldots\ldots\ldots + (15.60)^2}{10} - FC$$

$$= 173.26 - 169.17 = 4.09$$

$$S.C.\ tratam. = \frac{(7.90)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (11.31)^2}{5} - FC$$

$$= 171.53 - 169.17 = 2.36$$

$$S.C.\ total = (1.51)^2 + (1.72)^2 + \ldots\ldots\ldots + (2.31)^2 - FC$$

$$= 177.46 - 169.17 = 8.29$$

$$S.C.\ error = 177.46 - 173.26 - 171.53 + 169.17 = 1.84$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente.

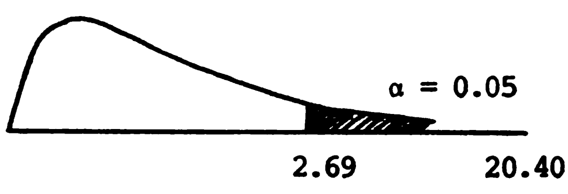

Figura 3.2 Distribución de F con 4 y 36 grados de libertad.

La figura anterior destaca que, la probabilidad de obtener un valor de $F > 20.40$ es bajísima ($P < 0.001$). Implica un resultado altamente significativo e induce a rechazar la hipótesis de nulidad. Por lo menos existe una diferencia entre 2 promedios, atribuible al efecto del tratamiento.

3.2 FORMULA GENERAL PARA PARCELA PERDIDA.

Algunas veces se pierde información en alguna parcela, sea por destrucción o por enfermedad de algún animal o muerte del mismo, en este caso se realiza el cálculo propiamente la estimación de la parcela perdida; se aclara que esta estimación no provee ninguna información adicional a la investigación, solamente facilita el cálculo correspondiente. Los datos con parcela perdida se tabularán como sigue:

Cuadro 3.5 Tabulación de la variable con parcela perdida.

TRATA-MIENTO (i)	BLOQUES (J)				TOTAL
	1	2	...	n	
1	$\hat{Y}_{11}$	Y_{12}	...	Y_{1n}	$Y_{1.} + \hat{Y}_{11}$
2	Y_{21}	Y_{22}	...	Y_{2n}	$Y_{2.}$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	...	.	.
.	.	.	.	.	.
t	Y_{t1}	Y_{t2}	...	Y_{tn}	$Y_{t.}$
Total	$Y_{.1} + \hat{Y}_{11}$	$Y_{.2}$		$Y_{.n}$	$Y_{..} + \hat{Y}_{11}$

El análisis de varianza estándar debe considerar este cambio de notación.

Cuadro 3.6 Análisis de varianza estándar.

F.V.	S.C.
Bloque	$\Sigma Y^2_{.j}/t - Y^2_{..}/nt$
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{i.}/n - Y^2_{..}/nt$
Error	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij} - \Sigma Y^2_{.j} - \Sigma Y^2_{i.} + Y^2_{..}/nt$
Total	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij} - Y^2_{..}/nt$

La suma de cuadrados del error del cuadro anterior es:

$$SCE = \Sigma Y^2_{ij} - \Sigma Y^2_{i.}/n - \Sigma Y^2_{.j}/t + Y^2_{..}/nt \qquad [10]$$

donde cada término tiene el equivalente siguiente con base en el Cuadro 3.5.

$$\Sigma Y^2_{ij} = \Sigma Y^2_{ij} + \hat{Y}^2_{11}$$

$$Y^2_{i.}/n = [\Sigma Y^2_{i.} + (Y_{1.} + \hat{Y}_{11})^2]/n$$

$$Y^2_{..}/nt = (Y_{..} + \hat{Y}_{11})^2/nt$$

Asi se define una relación para el cálculo de la suma de cuadrados del error basado en la parcela perdida Y_{11}.

$$SCE = \Sigma Y_{ij}^2 + \hat{Y}_{11}^2 - \frac{[\Sigma Y_{i.}^2 + (Y_{1.} + \hat{Y}_{11})^2]}{n} - \frac{[\Sigma Y_{.j}^2 + (Y_{.1} + \hat{Y}_{11})^2]}{t} + \frac{(Y_{..} + \hat{Y}_{11})^2}{nt} \quad [11]$$

Se minimiza esta definición derivando con respecto a la parcela perdida, para que la suma de cuadrados del error sea un mínimo, luego de las transformaciones aritméticas se llega a definir la fórmula para estimar parcela perdida.

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{Y}_{11}} = 2\hat{Y}_{11} - \frac{2(Y_{11} + \hat{Y}_{11})}{n} - \frac{2(Y_{.1} + \hat{Y}_{11})}{t} + \frac{2(Y_{..} + \hat{Y}_{11})}{nt} = 0$$

$$\hat{Y}_{11} - \frac{(Y_{1.} + \hat{Y}_{11})}{n} - \frac{(Y_{.1} + \hat{Y}_{11})}{t} + \frac{(Y_{..} + \hat{Y}_{11})}{nt} = 0$$

$$\frac{nt\hat{Y}_{11} - t(Y_{1.} + \hat{Y}_{11}) - n(Y_{.1} + \hat{Y}_{11}) + (Y_{..} + \hat{Y}_{11})}{nt} = 0$$

$$nt\hat{Y}_{11} - t(Y_{1.} + \hat{Y}_{11}) - n(Y_{.1} + \hat{Y}_{11}) + (Y_{..} + \hat{Y}_{11}) = 0$$

$$nt\hat{Y}_{11} - tY_{1.} - t\hat{Y}_{11} - nY_{.1} - n\hat{Y}_{11} + Y_{..} + \hat{Y}_{11} = 0$$

$$nt\hat{Y}_{11} - t\hat{Y}_{11} - n\hat{Y}_{11} + \hat{Y}_{11} - tY_{1.} - nY_{.1} + Y_{..} = 0$$

$$\hat{Y}_{11}\,(nt - t - n + 1) - tY_{1.} - nY_{.1} + Y_{..} = 0$$

$$\hat{Y}_{11} = \frac{tY_{1.} + nY_{.1} - Y_{..}}{(n-1)(t-1)} \quad [12]$$

Ejemplo 3.2 Suponer los datos de un experimento imaginario conducido en el campo en bloques al azar.

Cuadro 3.7 Tabulación de datos con parcela perdida

TRATA-	BLOQUES					SUMA	MEDIA
MIENTOS	A	B	C	D	E	$Y_{i.}$	$\bar{Y}_{i.}$
1	1.51	2.00	2.02	1.15	1.22	7.90	1.58
2	1.72	1.75	2.04	1.25	1.02	7.78	1.56
3	1.75	1.60	2.25	1.54	1.35*	7.14**	1.70
4	1.76	1.50	2.29	1.50	1.45	8.50	1.70
5	1.79	1.75	2.40	1.53	1.55	9.02	1.80
$Y_{.j}$	8.53	8.60	11.00	6.97	5.24 ***	40.34 ****	1.67

$* = (\hat{Y}_{35})$; $*** = (6.59)$; $Y_{..} + \hat{Y}_{35} = 41.69$

$** = (8.49)$; $**** = (41.69)$

Cálculo de parcela perdida.

$$\hat{Y}_{35} = \frac{n(Y_{.5}) + Y(Y_{3.}) - Y_{..}}{(n - 1)(t - 1)}$$

$$\hat{Y}_{35} = \frac{5(5.24) + 5(7.14) - 40.34}{(5 - 1)(5 - 1)}$$

$$\hat{Y}_{35} = \frac{26.20 + 35.70 - 40.34}{16}$$

$$\hat{Y}_{35} = 1.35$$

Cuadro 3.8 Análisis de varianza.

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Bloques	0.36	4	0.61	30.50 *
Tratamiento	0.21	4	0.05	2.50 n.s.
Error	0.36	15	0.02	
Total	3.00	23		

$$F.C. = \frac{41.69}{25} = 69.52$$

$$S.C.\ Bloques = \frac{(8.53)^2 + (8.60)^2 + (11.0)^2 + (6.97)^2 + (6.59)^2}{5} - FC$$

$$= 71.95 - 69.52 = 2.43$$

$$S.C.\ Trat. = \frac{(7.90)^2 + (7.78)^2 + (8.49)^2 + (8.50)^2 + (9.02)^2}{5} - FC$$

$$= 69.73 - 69.52 = 0.21$$

$$S.C.\ Error = (1.51)^2 + \ldots\ldots + (1.55)^2 - 71.95 - 69.73 + 69.52$$

$$= 72.51 - 71.95 - 69.73 + 69.52 = 0.36$$

$$S.C.\ Total = 72.52 - 69.52 = 3.00$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente

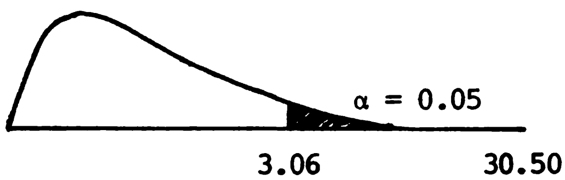

Figura 3.3 Distribución de F con 4 y 15 grados de libertad

La figura anterior destaca que, la probabilidad de obtener un valor de $F > 30.50$ es bajísima ($P < 0.001$). Implica un resultado altamente significativo e induce a rechazar la hipótesis de nulidad. Por lo menos existe una diferencia significativa entre 2 promedios, atribuible al efecto del tratamiento.

3.3 BLOQUES AL AZAR CON MUESTREO.

Suponer que no se registra la producción de toda la parcela experimental, pero, se decide tomar 2 muestras de 1 m^2 c/uno, esquemáticamente se tendrá:

Cuadro 3.9 Tabulación de datos experimentales

TRATA-MIENTO (i)	BLOQUES (J) 1		2		3			
	MUESTREO (K) 1	2	1	2	1	2	$Y_{i..}$	$\bar{Y}_{i..}$
T_1	Y_{111}	Y_{112}	Y_{121}	Y_{122}	Y_{131}	Y_{132}	$Y_{1..}$	$\bar{Y}_{1..}$
	$Y_{11.}$		$Y_{12.}$		$Y_{13.}$			
T_2	Y_{211}	Y_{212}	Y_{221}	Y_{222}	Y_{231}	Y_{232}	$Y_{2..}$	$\bar{Y}_{2..}$
	$Y_{21.}$		$Y_{22.}$		$Y_{23.}$			
T_3	Y_{311}	Y_{312}	Y_{321}	Y_{322}	Y_{331}	Y_{332}	$Y_{3..}$	$\bar{Y}_{3..}$
	$Y_{31.}$		$Y_{32.}$		$Y_{33.}$			
	$Y_{.1.}$		$Y_{.2.}$		$Y_{.3.}$		$Y_{...}$	$\bar{Y}_{...}$

Modelo estadístico. Se define una nueva fuente de variación debida al hecho de tomar muestras.

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} + \lambda_{ijk}$$

Donde:

λ_{ijk} = error de muestreo.

Análisis de varianza. Este diseño parte la variación en 4 componentes: la debida a bloques, a tratamientos, a la interacción de bloque con tratamiento que constituye al error experimental y la debida a muestras dentro de tratamientos dentro de bloques como se ilustra en el esquema siguiente:

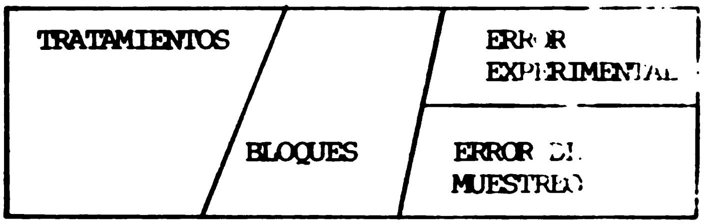

Figura 3.4 Partición en 4 componentes

Cuadro 3.10 Análisis de varianza en bloque al azar con muestreo

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.
Bloques	$\Sigma Y^2_{.j.}/tm - FC$	n - 1	SCB/GL
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{i..}/nm - FC$	t - 1	SCT/GL
Error Exp.	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij.}/n - \Sigma Y^2_{i..}/nm - \Sigma Y^2_{.j.}/tm + FC$	(n-1)(t-1)	SCE/GL
Error Muest.	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk} - \Sigma\Sigma Y^2_{ij.}/m$	nt(m - 1)	SCM/GL
Total	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk} - FC$	ntm - 1	

Ejemplo 3.3 Con 3 muestras por parcela experimental

Cuadro 3.11 Rendimiento de 10 variedades de frijol (kg/parc. de 10m²)

TRATA-	BLOQUES (J)					SUMA
MIENTOS (i)	1	2	3	4	5	$Y_{i..}$
	32.3	41.3	29.0	29.3	22.5	
A	34.5	42.2	29.5	29.5	22.3	
	66.8	83.5	58.5	58.8	44.8	312.40
	33.2	39.0	28.7	31.4	20.1	
B	33.8	38.4	27.7	30.2	19.8	
	67.0	77.4	56.4	61.6	39.9	302.30
	30.5	35.5	27.8	25.5	17.6	
C	30.4	34.6	26.5	24.2	15.4	
	60.9	70.1	54.3	49.7	33.0	268.00
	29.3	32.0	25.6	21.0	11.3	
D	29.0	31.5	25.7	22.3	11.0	
	58.3	63.5	51.3	43.3	22.3	238.70
$Y_{.j.}$	253.0	294.5	220.5	213.4	140.0	1121.40

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente

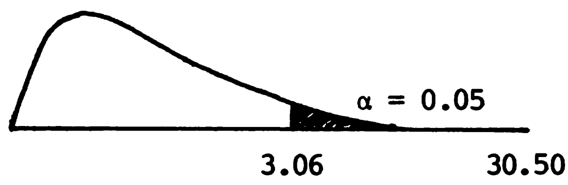

Figura 3.3 Distribución de F con 4 y 15 grados de libertad

La figura anterior destaca que, la probabilidad de obtener un valor de $F > 30.50$ es bajísima ($P < 0.001$). Implica un resultado altamente significativo e induce a rechazar la hipótesis de nulidad. Por lo menos existe una diferencia significativa entre 2 promedios, atribuible al efecto del tratamiento.

3.3 BLOQUES AL AZAR CON MUESTREO.

Suponer que no se registra la producción de toda la parcela experimental, pero, se decide tomar 2 muestras de 1 m^2 c/uno, esquemáticamente se tendrá:

Cuadro 3.9 Tabulación de datos experimentales

TRATAMIENTO (i)	BLOQUES (J) 1		2		3			
	MUESTREO (K) 1	2	1	2	1	2	$Y_{i..}$	$\bar{Y}_{i..}$
T_1	Y_{111}	Y_{112}	Y_{121}	Y_{122}	Y_{131}	Y_{132}		
	$Y_{11.}$		$Y_{12.}$		$Y_{13.}$		$Y_{1..}$	$\bar{Y}_{1..}$
T_2	Y_{211}	Y_{212}	Y_{221}	Y_{222}	Y_{231}	Y_{232}		
	$Y_{21.}$		$Y_{22.}$		$Y_{23.}$		$Y_{2..}$	$\bar{Y}_{2..}$
T_3	Y_{311}	Y_{312}	Y_{321}	Y_{322}	Y_{331}	Y_{332}		
	$Y_{31.}$		$Y_{32.}$		$Y_{33.}$		$Y_{3..}$	$\bar{Y}_{3..}$
	$Y_{.1.}$		$Y_{.2.}$		$Y_{.3.}$		$Y_{...}$	$\bar{Y}_{...}$

Modelo estadístico. Se define una nueva fuente de variación debida al hecho de tomar muestras.

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} + \lambda_{ijk}$$

Donde:

λ_{ijk} = error de muestreo.

Análisis de varianza. Este diseño parte la variación en 4 componentes: la debida a bloques, a tratamientos, a la interacción de bloque con tratamiento que constituye al error experimental y la debida a muestras dentro de tratamientos dentro de bloques como se ilustra en el esquema siguiente:

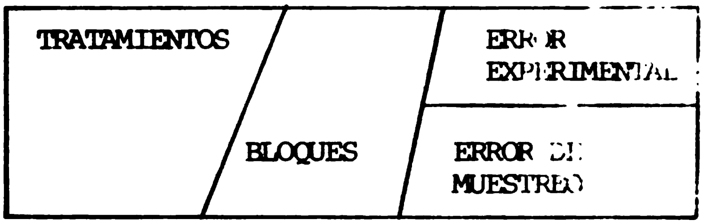

Figura 3.4 Partición en 4 componentes

Cuadro 3.10 Análisis de varianza en bloque al azar con muestreo

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.
Bloques	$\Sigma Y^2_{.j.}/tm - FC$	n - 1	SCB/GL
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{i..}/nm - FC$	t - 1	SCT/GL
Error Exp.	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij.}/n - \Sigma Y^2_{i..}/nm - \Sigma Y^2_{.j.}/tm + FC$	(n-1)(t-1)	SCE/GL
Error Muest.	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk} - \Sigma\Sigma Y^2_{ij.}/m$	nt(m - 1)	SCM/GL
Total	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk} - FC$	ntm - 1	

Ejemplo 3.3 Con 3 muestras por parcela experimental

Cuadro 3.11 Rendimiento de 10 variedades de frijol (kg/parc. de $10m^2$)

TRATA-MIENTOS (i)	BLOQUES (J) 1	2	3	4	5	SUMA $Y_{i..}$
A	32.3 34.5 66.8	41.3 42.2 83.5	29.0 29.5 58.5	29.3 29.5 58.8	22.5 22.3 44.8	312.40
B	33.2 33.8 67.0	39.0 38.4 77.4	28.7 27.7 56.4	31.4 30.2 61.6	20.1 19.8 39.9	302.30
C	30.5 30.4 60.9	35.5 34.6 70.1	27.8 26.5 54.3	25.5 24.2 49.7	17.6 15.4 33.0	268.00
D	29.3 29.0 58.3	32.0 31.5 63.5	25.6 25.7 51.3	21.0 22.3 43.3	11.3 11.0 22.3	238.70
$Y_{.j.}$	253.0	294.5	220.5	213.4	140.0	1121.40

Cuadro 3.12 Análisis de varianza en bloques al azar con muestreo

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_0
Bloques	1623.93	4	405.98	75 *
Tratamiento	339.62	3	113.21	21 *
Error Exp.	64.96	12	5.41	
Muestreo	10.10	40	0.51	
Total	2038.61	59		

$$\text{F.C.} = \frac{(1121.40)^2}{40} = 31438.45$$

$$\text{Y}\ldots = \frac{1121.40}{40} = 28.04$$

$$\text{S.C. bloques} = \frac{(253)^2 + \ldots\ldots\ldots + (140)^2}{8} - \text{FC}$$

$$= 33062.38 - 31458.45 = 1623.93$$

$$\text{S.C. Tratam.} = \frac{(312.4)^2 + \ldots\ldots\ldots + (238.7)^2}{10} - \text{FC}$$

$$= 31778.07 - 31438.45 = 339.62$$

$$\text{S.C. Error} = \frac{(66.8)^2 + \ldots\ldots + (22.3)^2}{} - 33062.38 - 31778.07 + \text{FC}$$

$$= 33466.96 - 33062.38 - 31778.07 + 31438.45 = 64.96$$

$$\text{S.C. Muestra} = (32.3)^2 + (34.5)^2 + \ldots\ldots + (11.0)^2 - 33466.96$$

$$= 33477.06 - 33466.96 = 10.10$$

$$\text{S.C. Total} = (32.3)^2 + \ldots\ldots\ldots + (11.0)^2 - \text{FC}$$

$$= 33477.06 - 31438.45 = 2038.61$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente.

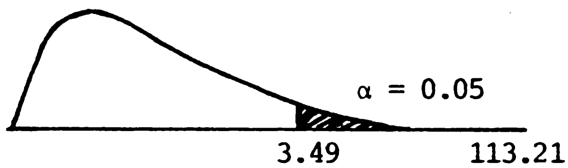

Figura 3.5 Distribución de F con 3 y 12 grados de libertad

La figura anterior destaca que, la probabilidad de obtener un valor de $F > 113.21$ es bajísima $(P < 0.001)$. Implica un resultado altamente significativo e induce a rechazar la hipótesis de nulidad. Por lo menos existe una diferencia significativa entre 2 promedios, atribuible al efecto del tratamiento.

3.4 B.A. CON SUB MUESTREO.

Modelo estadístico : $Y_{ijk\ell} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} + \lambda_{ijk} + \theta_{ijk\ell}$

Donde:

$\theta_{ijk\ell}$ = error de sub muestreo $\ell = \{1, 2, \ldots\ldots, s\}$

Esquema de la partición de la variación total

Ω Total

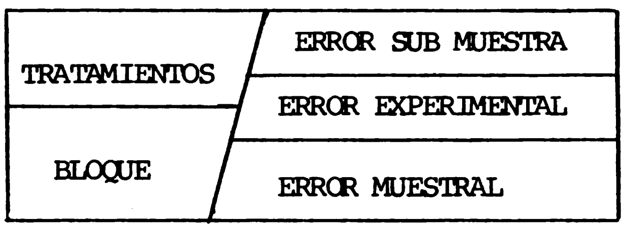

Figura 3.6 Rompimiento del total en 5 componentes.

Cuadro 3.13 Análisis de varianza con sub muestreo

F.V.	S.C.
Bloque	$\Sigma Y^2_{.j..}/tms - FC$
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{i...}/nms - FC$
Error Exp.	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij..}/ms - \Sigma Y^2_{.j..}/tms - \Sigma Y^2_{i...}/nms + FC$
Error Muestra	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk.}/s - \Sigma\Sigma Y^2_{ij..}/ms$
Error Sub muest.	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell} - \Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk.}/s$
Total	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell} - FC$

3.5 B.A. CON SUB SUB MUESTREO.

Modelo estadístico:

$$Y_{ijk\ell m} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} + \lambda_{ijk} + \theta_{ijk\ell} + \rho_{ijk\ell m}$$

Donde:

$\rho_{ijk\ell m}$ = Error de sub sub muestreo m = {1, 2, 3, ..., w}

Esquema de la partición de la variación total.

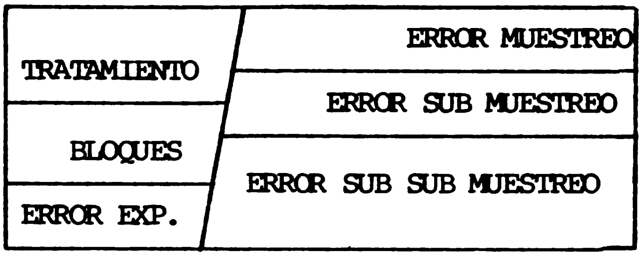

Figura 3.7 Rompimiento del total en 6 componentes

Cuadro 3.14 Análisis de varianza con sub sub muestreo.

F.V.	S.C.	G.L.
Bloques	$\Sigma Y^2_{.j...}/tmsw - FC$	n - 1
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{i....}/nmsw - FC$	t - 1
Error Exp.	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij...}/msw - \Sigma Y^2_{.j...}/tnsw - \Sigma Y^2_{i....}/nmsw + FC$	(n-1)(t-1)
Error Muestra	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk..}/sw - \Sigma\Sigma Y^2_{ij...}/msw$	tn(m - 1)
Error sub muest.	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell.}/w - \Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk..}/sw$	tnm(s - 1)
E. sub sub muest.	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell m} - \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell.}/w$	tnms(w -1)
Total	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ijk\ell m}$	tnmsw - 1

$$F.C. = \frac{Y_{.....}^2}{tnmsw}$$

3.6 BLOQUE AL AZAR CON TESTIGO REPETIDO (1, 2, ..., etc.)

Los datos que ha continuación se tabulan corresponden a un experimento con 3 tratamientos y 2 testigos repetidos, es decir 4 tratamientos en total.

Cuadro 3.15 Datos tabulados de experimentos con varios testigos.

TRATA- MIENTO (i)	BLOQUE (J) 1	2	3	4	$Y_{i..}$	$\bar{Y}_{i..}$
T_1	2.5	2.7	2.3	2.0	9.5	2.38
T_2	3.0	3.0	2.7	2.5	11.2	2.80
T_3	3.2	3.4	2.8	2.9	12.3	3.08
T_0	2.0	2.1	1.9	1.8	16.4	2.05
T_0	2.3	2.4	2.1	1.8		
$Y_{.j}$	13.0	13.6	11.8	11.0	49.4	

Modelo estadístico: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

Prueba de hipótesis:

$H_0 : \mu_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \mu_\tau$

H_A : Por lo menos existe diferencia entre 2 medias

Criterio de prueba: "F de Fisher"

$$F_c = \frac{\text{CM tratamiento}}{\text{CM error}}$$

Análisis de varianza. El cálculo de la suma de cuadrados y los grados de libertad de tratamientos, apenas sufre un pequeño cambio, que implica ganancia de grados de libertad para el error.

Cuadro 3.16 Análisis de varianza de bloques al azar.

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Bloque	0.822	3	0.274	18.45
Tratamiento	3.347	3	1.11567	75.13
Error	0.193	13	0.01485	
Total	4.362	19		

$$\text{F.C.} = \frac{49.4^2}{20} = 122.018$$

$$\text{S.C. Bloque} = \frac{13.0^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 11^2}{5} - \text{FC}$$

$$= 122.84 - 122.018 = 0.822$$

$$\text{S.C. Trat.} = \frac{9.5^2 + 11.2^2 + 12.3^2}{4} + \frac{16.4^2}{8} - \text{FC}$$

$$= 91.745 + 33.62 - 122.018 = 3.347$$

$$\text{S.C. Error} = 2.5^2 + \ldots\ldots + 1.8^2 - 122.84 - 125.365 + 122.018 = 0.193$$

$$\text{S.C. Total} = 2.5^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1.8^2 - \text{FC}$$

$$= 126.38 - 122.018 = 4.362$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente.

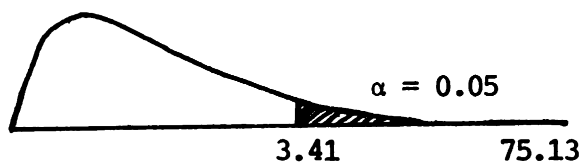

Figura 3.8 Distribución de F con 3 y 13 grados de libertad.

La figura anterior destaca que la probabilidad que F sea mayor que 75.13 es bajísima ($P < 0.001$), lo que induce a rechazar la hipótesis de nulidad. Por lo menos existe diferencia entre 2 promedios, atribuible al efecto del tratamiento.

3.7 BLOQUES AL AZAR REPETIDO EN EL ESPACIO

Surge esta situación cuando un experimento en B.A. se conduce en localides diferentes.

Cuadro 3.17 Datos de un diseño en B.A. conducido en 4 estaciones experimentales (localidades diferentes).

Localidad 1.

TRATAMIENTOS	I	II	III	IV	V	$Y_{i.}$	$\bar{Y}_{i.}$
0	2.90	3.50	4.10	3.90	3.00	17.40	3.48
20	3.00	3.60	3.70	3.80	3.10	17.20	3.44
40	3.10	3.80	4.20	3.10	3.50	17.70	3.54
60	4.50	4.40	3.80	4.70	4.10	21.50	4.30
80	6.50	8.00	7.40	7.00	8.00	36.90	7.38
$Y_{.j}$	20.00	23.30	23.20	22.50	21.70	110.70	

Localidad 2

0	3.90	4.50	5.10	4.50	4.00	22.00	4.40
20	4.00	4.60	4.50	4.80	4.10	22.00	4.40
40	4.30	4.80	5.20	4.30	4.50	23.10	4.62
60	5.20	5.40	4.80	5.00	5.10	25.50	5.10
80	7.50	9.00	8.40	8.00	8.00	40.90	8.17
$Y_{.j}$	24.90	28.30	28.00	26.60	25.70	133.50	

Localidad 3.

0	4.90	5.50	6.10	5.30	5.00	26.80	5.36
20	5.00	5.80	5.70	5.80	5.10	27.40	5.48
40	5.40	5.80	6.20	5.10	5.50	28.00	5.60
60	6.50	6.70	5.80	6.70	6.80	32.50	6.50
80	8.50	10.30	9.40	9.30	10.50	48.00	9.60
$Y_{.j}$	30.30	34.10	33.20	32.20	32.90	162.70	

Localidad 4.

0	5.20	6.50	7.50	6.90	6.00	32.10	6.42
20	6.00	6.00	6.70	6.00	6.10	30.80	6.16
40	6.10	6.50	7.50	6.10	6.00	32.20	6.44
60	7.50	7.40	6.00	7.00	7.10	35.00	7.00
80	9.50	11.50	10.40	10.40	11.40	53.20	10.64
$Y_{.j}$	34.30	37.90	38.10	36.40	36.60	183.30	

Modelo estadístico:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \theta_k + (\beta.\theta)_{jk} + (\tau.\beta)_{ij} + (\tau.\beta.\theta)_{ijk}$$

Donde:

θ_k = Efecto de localidad k = {1, 2, ..., m}

$\beta_j + (\beta.\theta)_{jk}$ = Repeticiones al experimento

$(\tau.\beta)_{ij} + (\tau.\beta.\theta)_{ijk}$ = Error experimental = ε_{ijk}

Para el cálculo de las sumas de cuadrados se tabulan 2 cuadros de doble entrada: bloque por localidad y localidad por tratamiento

Cuadro 3.18 Tabulación de la interacción bloque por localidad

	LOCALIDAD				
BLOQUE	1	2	3	4	Σ
I	20.00	24.90	30.30	34.30	109.50
II	23.30	28.30	34.10	37.90	123.60
III	23.20	28.00	33.20	38.10	122.50
IV	22.50	26.60	32.20	36.40	117.70
V	21.70	25.70	32.90	36.60	116.90
Σ	110.70	133.50	162.70	183.30	590.20

Cuadro 3.19 Tabulación de la interacción tratamientos por localidad

	LOCALIDAD				
TRATAMIENTO	1	2	3	4	Σ
0	17.40	22.00	26.80	32.10	98.30
20	17.20	22.00	27.40	30.80	97.40
40	17.70	23.10	28.00	32.20	101.00
60	21.50	25.50	32.50	35.00	114.50
80	36.90	40.90	48.00	53.20	179.00
Σ	110.70	133.50	162.70	183.30	590.20

Análisis de varianza. Se debe tener cuidado al combinar los grados de libertad del error experimental y de repeticiones al experimento, en forma similar se debe cambiar las sumas de cuadrados.

Cuadro 3.20 Análisis de varianza combinado de 4 experimentos

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	F
Localidades	3	122.5162	40.8387	46.0051
Repetición al Exp.	16	6.6511	1.5971	1.7991
Tratamiento	4	241.7344	60.4336	68.0789
Trat x Loc.	12	1.3485	0.1123	0.1265
Error	64	16.1887	0.0620	
Total	99	388.4391		

$$F.C. = \frac{590.2^2}{100} = 3483.36$$

$$S.C.\ Bloque = \frac{109.5^2 + \ldots\ldots\ldots + 116.9^2}{20} - FC$$

$$= 3489.62 - 3483.36 = 6.26$$

$$SC.\ Local = \frac{110.70^2 + \ldots\ldots\ldots + 183.30^2}{25} - FC$$

$$= 3605.88 - 3483.36 = 122.52$$

$$S.C.\ Tratam. = \frac{98.3^2 + \ldots\ldots\ldots + 179^2}{20} - FC$$

$$= 3725.10 - 3483.36 = 241.74$$

$$SC.\ B \times Loc. = \frac{20^2 + \ldots\ldots\ldots + 36.60^2}{5} - FC - SCB - SCL$$

$$= 3612.53 - 3483.36 - 6.26 - 122.52 = 0.39$$

$$SC.\ L \times T = \frac{17.4^2 + \ldots\ldots\ldots + 53.2^2}{5} - FC - SCL - SCT$$

$$= 3848.96 - 3483.36 - 122.52 - 241.74 = 1.34$$

S.C. Error = SCB x T + SCB x T x L ó por diferencia.

= 16.18

$$S.C.\ Total = 2.9^2 + \ldots\ldots\ldots + 11.4^2 - FC$$

$$= 3871.80 - 3483.36 = 388.44$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente.

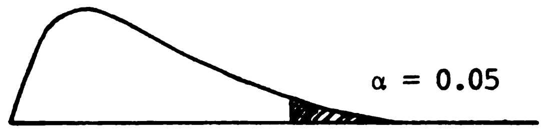

Figura 3.9 Distribución de F con 4 y 64 grados de libertad

La probabilidad que F sea mayor que 68.08 es pequeñísima esto induce a rechazar la hipótesis nula.

NOTA:

El anterior análisis es válido si las varianzas son relativamente homogéneas en la 4 localidades, de no ser esto evidente se realiza la transformación de los datos por el inverso de la desviación estándar en cada localidad, de acuerdo a la regla:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{CME}} \cdot X_i$$

para ello se realiza un análisis de varianza en cada localidad con el objeto de evaluar los cuadrados medios del error, como sigue:

Cuadro 3.21 Análisis de varianza en bloques al azar para cada localidad

F.V.		C.M. (1)	C.M. (2)	C.M. (3)	C.M. (4)
Repeticiones	4	0.368600	0.424999	0.406600	0.462600
Tratamiento	4	14.242600	13.010999	15.949600	17.567600
Error	16	0.204099	0.107250	0.244599	0.455849
Total	24				

Los datos transformados se tabulan en el cuadro siguiente

Cuadro 3.22 Tabulación de datos transformados por el recíproco de su desviación estándar

Tratamiento	I	II	III	IV	V	$Y_{i.}$	$\bar{Y}_{i.}$
Localidad 1.							
0	6.41	7.74	9.07	8.63	6.64	38.51	7.70
20	6.64	7.96	8.19	8.41	6.86	38.07	7.61
40	6.86	8.41	9.29	6.86	7.74	39.17	7.83
60	9.96	9.73	8.41	10.40	9.07	47.59	9.51
80	14.38	17.70	16.38	15.49	17.70	81.67	16.33
Σ	44.25	51.54	51.34	49.79	48.01	245.01	
Localidad 2.							
0	11.90	13.74	15.57	13.74	12.21	67.17	13.43
20	12.21	14.02	13.74	14.65	12.51	67.17	13.42
40	13.13	14.65	15.87	13.13	13.74	70.53	14.10
60	15.87	16.48	14.65	15.26	15.57	77.86	15.57
80	22.90	27.48	25.65	24.42	24.42	124.88	24.97
Σ	76.01	86.39	85.48	81.20	78.45	407.61	
Localidad 3.							
0	9.90	11.12	12.33	10.71	10.11	54.18	10.83
20	10.11	11.72	11.52	11.72	10.31	55.40	11.08
40	10.91	11.72	12.53	10.31	11.12	56.61	11.32
60	13.14	13.54	11.72	13.54	13.74	65.71	13.14
80	17.18	20.82	19.00	18.80	21.23	97.05	19.41
Σ	61.24	68.92	67.10	65.08	66.51	328.95	
Localidad 4.							
0	7.70	9.62	11.10	10.22	8.88	47.54	9.50
20	8.80	8.88	9.92	8.88	9.03	45.53	9.10
40	9.03	9.62	11.10	9.03	8.88	47.69	9.53
60	11.10	10.96	8.88	10.36	10.51	51.83	10.36
80	14.07	17.03	15.40	15.40	16.88	78.79	15.75
Σ	50.70	56.11	56.40	53.89	54.18	271.38	

Los cálculos son similares a los indicados anteriormente

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	F_c
Experimento	3	622.449	207.483	57.073
Rep. al exper.	16	33.891	7.811	2.148
Tratamiento	4	1130.403	282.600	77.735
Trat. x Exp.	12	49.264	4.105	1.129
Error	64	63.926	3.635	
Total	99	1899.934		

Las decisiones estadísticas se realizan con base en la prueba de F.

3.8 BLOQUE AL AZAR REPETIDO EN EL TIEMPO.

En experimentos con cultivos semipermanentes o permanentes, como en el caso de los forrajes, se llevan registros con intervalos regulares; por ejemplo, cortes cada 15 días o cada 30 días etc.

Aunque el diseño original es bloque al azar se interpreta como parcela dividida en el tiempo.

Modelo estadístico:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau.\beta)_{ij} + \theta + (\tau.\theta)_{ik} + (\beta.\theta)_{jk} + (\tau.\beta.\theta)_{ijk}$$

Donde:

$(\tau.\beta)_{ij}$ = Error (a)

$(\tau.\beta.\theta)_{ijk}$ = Error (b)

El cálculo de la suma de cuadrados y grados de libertad se ilustra en el ejemplo del párrafo 3.7 donde las localidades serán sustituídas por cortes cada 30 días; es decir, localidad 1 simulará el primer corte efectuado a los 30 días, localidad 2 al segundo corte a los 60 días y asi sucesivamente.

Se requiere tabular la información en cuadros de doble entrada: bloque x tratamiento, bloque por corte y tratamiento x corte, los 2 últimos ya se encuentran tabulados en 3.7 siendo necesario unicamente el siguiente:

Cuadro 3.23 Tabulación de la interacción tratamientos por bloques

	BLOQUE					
TRATAMIENTO	1	2	3	4	5	Σ
0	16.90	20.00	22.80	20.60	18.00	98.30
20	18.00	20.00	20.60	20.40	18.40	97.40
40	18.90	20.90	23.10	18.60	19.50	101.00
60	23.70	23.90	20.40	23.40	23.10	114.50
80	32.00	38.80	35.60	34.70	37.90	179.00
Σ	109.50	123.60	122.50	117.70	116.90	590.20

$$\text{S.C. Bloque x Trat.} = \frac{16.9^2 + \ldots\ldots\ldots + 37.9^2}{4} - FC - SCB - SCT =$$

Cuadro 3.24 Análisis de varianza de bloque al azar repetido en el tiempo.

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	F
Bloque	4	6.257	1.564	1.894
Tratamiento	4	241.734	60.433	73.190
Error (a)	16	13.212	0.825	
Epocas	3	122.516	40.838	658.688
T x E	12	1.348	0.112	1.811
B x E	12	0.393	0.032	0.527
Error (b)	48	2.976	0.062	
Total	99	388.439		

Las decisiones estadísticas con base en pruebas de F, teniendo el cuidado de usar el error adecuado, por ejemplo, para probar tratamiento se usa el error (a); mientras que para probar cortes se usa el error (b).

4. CUADRADO LATINO

4.1 CUADRADO LATINO CON UNA OBSERVACION POR PARCELA EXPERIMENTAL

4.11 USOS: Este diseño se utiliza para conducir experimentos en condiciones heterogéneas donde las propiedades cambian en dos direcciones como ocurre en la toma de muestras para análisis de laboratorio, donde las condiciones cambian entre planta y planta (una dirección) y de hoja a hoja por tamaño o posición en la misma planta (otra dirección). En la toma de datos de mercadeo, economía, sociología, donde el precio de hortalizas o cualquier otro cultivo varía en los días de la semana (una dirección) y en función de los diferentes mercados (otra dirección).

4.12 VENTAJAS. Controla la F.V. en las dos direcciones hileras y columnas ; es decir, extrae del error experimental la variación debido a tratamientos, hileras y columnas.

4.13 DESVENTAJAS: Se pierde G.L. en el error experimental, sacrificando la precisión del diseño experimental.
Número limitado de tratamientos, porque el número de hileras y columnas debe ser igual al de tratamientos.

4.14 RESTRICCION: Tiene 2 restricciones:

1. Un tratamiento cualquiera debe estar solamente una vez en la columna.
2. Un tratamiento cualquiera debe aparecer solamente una vez en una hilera.

4.15 CROQUIS DE CAMPO: El diseño de campo presenta la configuración idealizada siguiente:

COLUMNAS

HILERAS

A	B	C
C	A	B
B	C	A

Tratamientos={A, B, C}

Modelo estadístico:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \tau_{(k)} + \varepsilon_{ij}$$

Donde:

μ = Media común

α_i = Efecto de hilera $i = \{1, 2, 3, \ldots\ldots., n\}$

β_j = Efecto de columna $j = \{1, 2, 3, \ldots\ldots., n\}$

ε_{ij} = Error experimental

$\tau_{(k)}$ = Efecto de tratam. $k = \{1, 2, 3, \ldots\ldots., n\}$

a) Hipótesis consideradas:

H_o : $\mu_1 = \ldots\ldots\ldots = \mu$

H_A : Por lo menos existe diferencia entre 2 promedios de tratamiento.

b) Criterio de prueba:

$$F_c = \frac{\text{CM de tratamiento}}{\text{CM de error}}$$

c) Datos: La información se tabula en forma matricial de hileras y columnas y un total para tratamientos como en el cuadro siguiente:

Cuadro 4.1 Tabulación de datos en hileras y columnas

HILERAS	COLUMNAS			$Y_{i.}$
1	Y_{11} A	Y_{12} B	Y_{13} C	$Y_{1.}$
2	Y_{21} C	Y_{22} A	Y_{23} B	$Y_{2.}$
3	Y_{31} B	Y_{32} C	Y_{33} A	$Y_{3.}$
$Y_{.j}$	$Y_{.1}$	$Y_{.2}$	$Y_{.3}$	$Y_{..}$

Σ Trat.	$Y_{.(k)}$
A	$Y_{.(1)}$
B	$Y_{.(2)}$
C	$Y_{.(3)}$

d) Análisis de varianza. El diseño, permite partir la variación total en 4 componentes: hileras, columnas, tratamientos y error experimental de acuerdo al esquema:

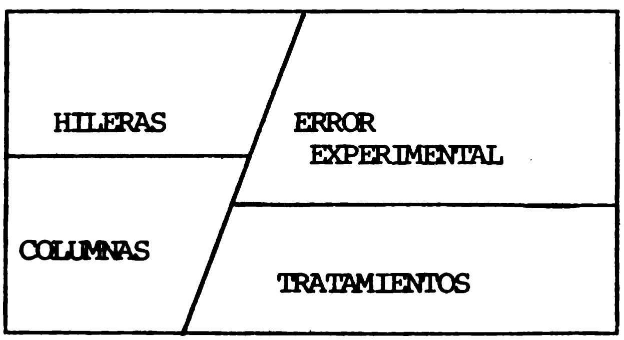

Figura 4.1 Rompimiento del total en 4 componentes

Cuadro 4.2 Análisis de varianza.

F.V.	S.C.	G.L.
Hileras	$\Sigma Y_{i.}^2/n - FC$	$(n - 1)$
Columnas	$\Sigma Y_{.j}^2/n - FC$	$(n - 1)$
Tratamiento	$\Sigma Y_{(k)}^2/n - FC$	$(n - 1)$
Error Exp.	$\Sigma\Sigma Y_{ij}^2 - \Sigma Y_{i.}^2/n - \Sigma Y_{.j}^2/n - \Sigma Y_{(k)}^2/n + 2\ FC$	$(n-1)(n-2)$
Total	$\Sigma\Sigma Y_{ij}^2 - FC$	$n^2 - 1$

Ejemplo 4.1 De cierto experimento conducido en invernadero se obtuvo los datos siguientes:

Cuadro 4.3 Peso de la materia seca de frijol a los 30 días por unidad experimental (gramos).

HILERAS	COLUMNAS				SUMA
	1	2	3	4	$Y_{i.}$
1	6.3 A	6.8 B	7.5 C	8.1 D	28.70
2	8.9 D	7.5 A	7.9 B	8.4 C	32.70
3	7.5 C	8.0 D	6.0 A	6.2 B	27.70
4	9.4 B	9.9 C	10.5 D	8.0 A	37.80
$Y_{.j}$	32.1	32.2	31.9	30.7	126.90

Trat.	Suma	$\bar{Y}$
A	27.80	6.95
B	30.30	7.57
C	33.30	8.32
D	35.50	8.87

Cuadro 4.4 Análisis de varianza y cálculo de estimadores

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Hileras	15.80	3	5.27	88
Columnas	0.36	3	0.12	2
Tratamiento	8.54	3	2.85	48
Error	0.35	6		
Total	25.05	15		

$$F.C. = \frac{(126.9)^2}{16} = 1006.48$$

$$S.C.\ Hileras = \frac{(28.7)^2 + (32.7)^2 + (27.7)^2 + (37.8)^2}{4} - FC$$

$$= 1022.28 - 1006.48 = 15.80$$

$$SC.\ Columnas = \frac{(32.1)^2 + (32.2)^2 + (31.9)^2 + (30.7)^2}{4} - FC$$

$$= 1006.84 - 1006.48 = 0.36$$

$$S.C.\ Tratam. = \frac{(27.8)^2 + (30.3)^2 + (33.3)^2 + (35.5)^2}{4} - FC$$

$$= 1015.02 - 1006.48 = 8.54$$

$$S.C.\ Error = (6.3)^2 + \ldots. + (8.0)^2 - 1022.28 - 1006.84 - 1015.02 + 2FC$$

$$= 1031.53 - 1022.28 - 1006.84 - 1015.02 + 2\ 12.96 = 0.35$$

$$S.C.\ Total = 1031.53 - FC$$

$$= 1031.53 - 1006.48 = 25.05$$

f) Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente.

$F_{0.05}$ con G.L. de tratamientos (3) y error (6) = 4.76
Como $F_c > F_t$, o sea 48 > 4.76 se detecta un valor(*) al 5%

g) Decisión: Rechazamos la H_o.

h) Interpretación: Es función del tipo o naturaleza de los tratamientos.

4.2 CUADRADO LATINO CON MUESTREO.

Se aplica cuando de cada parcela experimental se hace un muestreo, que podría ser un duplicado, triplicado, etc.

Cuadro 4.5 Tabulación en cuadrado latino con muestreo.

		COLUMNAS 1		2		3		$Y_{i..}$
HILERAS	1	Y_{111}	Y_{112}	Y_{121}	Y_{122}	Y_{131}	Y_{132}	
		$Y_{11.}$	A	$Y_{12.}$	B	$Y_{13.}$	C	$Y_{1..}$
	2	Y_{211}	Y_{212}	Y_{221}	Y_{222}	Y_{231}	Y_{232}	
		$Y_{21.}$	C	$Y_{22.}$	A	$Y_{23.}$	B	$Y_{2..}$
	3	Y_{311}	Y_{312}	Y_{321}	Y_{322}	Y_{331}	Y_{332}	
		$Y_{31.}$	B	$Y_{32.}$	C	$Y_{33.}$	A	$Y_{3..}$
$Y_{.j.}$		$Y_{.1.}$		$Y_{.2.}$		$Y_{.3.}$		$Y_{...}$

Trat. $Y_{.(k).}$
$Y_{.(1).}$
$Y_{.(n).}$

Modelo estadístico: $Y_{ij\ell} = \mu + \alpha_i + \quad_j + \quad_{(k)} + \quad_{ij} + \lambda_{ij\ell}$
Donde:

$\lambda_{ij\ell}$ = error muestral $\ell = \{1, 2, \ldots\ldots, m\}$

Cuadro 4.6 Análisis de varianza

F.V.		
Hileras	$\Sigma Y^2_{i..}/nm - FC$	$n - 1$
Columnas	$\Sigma Y^2_{.j.}/nm - FC$	$n - 1$
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{.(k).}/nm - FC$	$n - 1$
Error Exp.	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij.}/n - \Sigma Y^2_{i..}/nm - \Sigma Y^2_{.j.}/nm - \Sigma Y^2_{.(k).}/nm + 2FC$	$(n-1)(n-2)$
Error Muest.	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ij\ell} - \Sigma\Sigma Y^2_{ij.}/n$	$n^2(m - 1)$
Total	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ij\ell} - FC$	$n^2 m - 1$

Ejemplo 4.2 De cierto experimento conducido en invernadero se obtuvo los datos siguientes:

Cuadro 4.7 Peso de la materia seca de frijol a los 30 días por unidad experimental (gramos).

HILE-	COLUMNAS				
RAS	1	2	3	4	$Y_{i..}$
1	6.3 7.4 6.3	6.4 7.8 6.8	6.5 8.2 7.5	6.8 9.0 8.1	
	20.00 A	21.00 B	22.20 C	23.90 D	87.1
2	6.1 7.0 8.9	6.5 7.2 7.5	6.6 7.3 7.9	6.9 7.4 8.4	
	22.00 D	21.20 A	21.80 B	22.70 C	87.7
3	6.4 7.8 7.5	6.9 7.9 8.0	6.0 7.1 6.0	6.2 7.5 6.2	
	21.70 C	22.80 D	10.10 A	19.90 B	83.5
4	6.7 8.2 9.4	6.8 8.4 9.9	6.9 8.5 10.5	6.0 8.0 8.0	
	24.30 B	25.10 C	25.90 D	22.00 A	97.3
$Y_{.j.}$	88.00	90.10	89.00	88.50	355.6

Trat.	Suma	$\bar{Y}$
A	82.30	6.86
B	87.00	7.25
C	91.70	7.64
D	94.60	7.88

Análisis de varianza. El total se parte en componentes debido a: hileras, columnas, tratamientos, error experimental y error de muestreo como en la figura siguiente:

Ω TOTAL

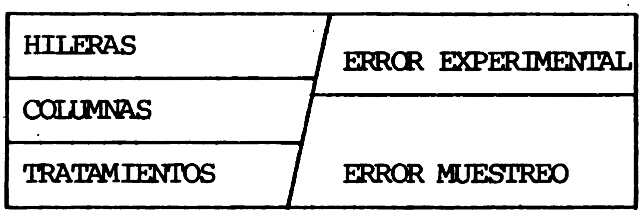

Figura 4.2 Partición del total en 5 componentes.

Cuadro 4.8 Análisis de varianza y cálculo de estimadores.

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Hileras	8.70	3	2.90	
Columnas	0.21	3	0.07	
Tratamiento	7.30	3	2.43	
Error Exp.	1.35	6	0.23	10.57 *
Muestreo	33.78	32	1.06	
Total	51.34	47		

$$F.C. = \frac{Y^2_{\cdots}}{48} = \frac{(355.60)^2}{48} = 2634.40$$

$$S.C.\ hileras = \frac{(87.1)^2 + (87.7)^2 + (83.5)^2 + (97.3)^2}{12} - FC$$

$$= 2643.10 - 2634.40 = 8.70$$

$$S.C.\ Colum. = \frac{(88.0)^2 + (90.1)^2 + (89.0)^2 + (88.5)^2}{12} - FC$$

$$= 2634.61 - 2634.40 = 0.21$$

$$S.C.\ Tratam. = \frac{(82.3)^2 + (87.0)^2 + (91.7)^2 + (94.6)^2}{12} - FC$$

$$= 2641.70 - 2634.40 = 7.30$$

$$S.C.\ Error = \frac{(20.0)^2 + \ldots\ldots\ + (22.0)^2}{3} - 7919.41 + 2\ FC$$

$$= 2651.96 - 2643.10 - 2634.61 - 2641.70 + 52.68.80$$

$$= 1.35$$

$$S.C.\ Muestra = (6.3)^2 + (7.4)^2 + \ldots\ldots\ + (8.0)^2 - 2651.96$$

$$= 2685.74 - 2651.96 = 33.78$$

$$S.C.\ total = (6.3)^2 + (7.4)^2 + \ldots\ldots + (8.0)^2 - FC$$

$$= 2685.74 - 2634.40 = 51.34$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente

Como $F_c > F_t$, o sea $10.57 > 4.76$ se detecta un valor significativo al 5%, se rechaza la hipótesis nula.

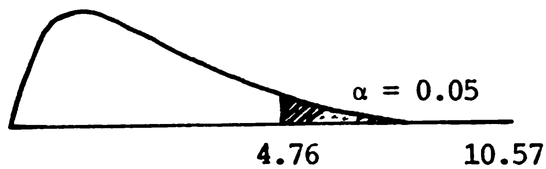

Figura 4.3 Distribución de F con 3 y 6 grados de libertad.

4.3 CUADRADOS LATINOS REPETIDOS.

Es frecuente enfrentarse a experimentos con bajo número de tratamientos en Cuadrado Latino, esto trae como consecuencia que los grados de libertad del error practicamente desaparecen.

Para ganar G.L. del error se utiliza más de un cuadrado latino completo y luego se realiza el análisis de varianza combinando los cuadrados latinos.

Sean los 3 cuadrados latinos repetidos.

	C. Latino (1)				C. Latino (2)	C. Latino (3)
	Y_{111}				Y_{112}	Y_{113}
1	A	B	C	$Y_{1.1}$		
2	C	B	A	$Y_{2.1}$		
3	B	C	A	$Y_{3.1}$		
				$Y_{..1}$	$Y_{..2}$	$Y_{..3}$

Modelo estadístico:

$$Y_{ij\ell} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \tau_{(k)} + \rho_\ell + (\tau.\rho)_{(k)\ell} + \varepsilon_{ij\ell}$$

Donde:

ρ_ℓ = Efecto de los cuadrados $\ell = \{1, 2, 3, \ldots, s\}$

$\varepsilon_{ij\ell}$ = Error experimental

$(\tau.\rho)_{(k)\ell}$ = Interacción tratamiento por cuadrado latino

Cuadro 4.9 Análisis de varianza de 3 cuadrados latinos.

F.V.	S.C.	G.L.
Cuadrados	$\Sigma Y^2_{..\ell}/n^2 - FC$	$s - 1$
Tratamiento	$\Sigma\Sigma Y^2_{.(k).}/ns - FC$	$n - 1$
C. x Tr.	$\Sigma\Sigma Y^2_{.(k)\ell}/n - \Sigma Y^2_{..\ell}/n^2 - \Sigma\Sigma Y^2_{.(k).}/ns + FC$	$(s-1)(n-1)$
Hileras	$\Sigma\Sigma Y^2_{i.\ell}/n - \Sigma Y^2_{..\ell}/n^2$	$s(n - 1)$
Columnas	$\Sigma\Sigma Y^2_{.j\ell}/n - \Sigma Y^2_{..\ell}/n^2$	$s(n - 1)$
Error Exp.	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ij\ell} - \Sigma\Sigma Y^2_{.(k)\ell}/n - \Sigma\Sigma Y^2_{i.\ell}/n - \Sigma\Sigma Y^2_{.j\ell}/n + 2\Sigma Y^2_{..\ell}/n^2$	$s(n-1)(n-2)$
Total	$\Sigma\Sigma\Sigma Y^2_{ij\ell} - FC$	$sn^2 - 1$

Ejemplo 4.3 Suponer un experimento con 2 cuadros latinos repetidos.

Cuadro 4.10 Resultados tabulados en forma de matriz cuadrado latino estándar, obtenido del libro de campo.

3.2 a	3.0 b	2.4 c	2.0 d	10.6	4.0 a	3.2 b	2.0 c	2.1 d	11.3
2.2 d	3.4 a	3.0 b	2.5 c	11.1	2.3 d	4.1 a	2.4 b	2.4 c	12.2
2.4 c	2.3 d	3.5 a	3.2 b	11.4	2.7 c	2.6 d	4.3 a	3.3 b	12.9
3.3 b	2.7 c	2.6 d	3.8 a	12.4	3.7 b	2.9 c	2.7 d	4.5 a	13.8
11.1	11.4	11.5	11.5	45.5	12.7	12.8	12.4	12.3	50.2

Tratamientos

	a	b	c	d	
C. Latino 1	13.9	12.5	10.0	9.1	45.5
C. Latino 2	16.9	13.6	10.0	9.7	50.2
	30.8	26.1	20.0	18.8	

$$\text{F.C.} = \frac{95.7^2}{32} = 286.2028$$

$$\text{SC. Cuadrados Lat.} = \frac{45.5^2 + 50.2^2}{16} - \text{FC}$$

$$= 286.8931 - \text{FC} = 0.6903$$

$$\text{S.C. Tratamientos} = \frac{30.8^2 + \ldots\ldots\ldots + 18.8^2}{8} - \text{FC}$$

$$= 297.9112 - 286.2028 = 11.7084$$

$$\text{S.C. hileras/Cuad.} = \frac{10.6^2 + \ldots\ldots\ldots + 13.8^2}{4} - 286.8931$$

$$= 288.1675 - 286.8931 = 1.2744$$

$$\text{S.C. Colum/Cuad.} = \frac{11.1^2 + \ldots\ldots\ldots + 12.3^2}{4} - 286.8931$$

$$= 286.9625 - 286.8931 = 0.0694$$

$$\text{SC. Trat. x C.L.} = \frac{13.9^2 + \ldots\ldots + 9.7^2}{4} - \text{FC} - \text{SCT} - \text{SCC.L.}$$

$$= 299.23 - 286.2028 - 11.7084 - 0.6903 = 0.631$$

$$\text{S.C. Error} = 3.2^2 + \ldots\ldots\ldots + 4.5^2 - 1.2744 - 0.0694$$

$$- 0.631 + 2\ \text{FC} = 0.1337$$

$$\text{S.C. Total} = 3.2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 4.5^2 - \text{FC}$$

$$= 300.71 - 286.2028 = 14.5072$$

Cuadro 4.11 Análisis de varianza de cuadrados latinos repetidos

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Cuadrados	0.6903	1	0.6903	62.19
Hileras/Cuad.	1.2744	6	0.2124	19.14
Columnas/Cuad.	0.0694	6	0.0116	1.04
Tratamientos	11.7084	3	3.9028	351.60
Trat. x Cuad.	0.6310	3	0.2103	18.94
Error	0.1337	12	0.0111	
Total	14.5072	31		

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$

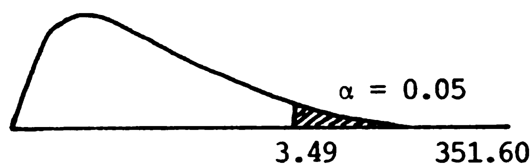

Figura 4.4 Distribución de F con 3 y 12 grados de libertad

La figura destaca que la probabilidad de $F_c = 351.60$ es muy pequeña, esto implica un resultado significativo.

Por lo menos existe diferencia entre 2 medias.

4.4 PARCELAS PERDIDAS.

Se calcula a partir de la suma de cuadrados del error, por minización de la suma de cuadrados en forma similar a [10], [11] y [12]; es decir:

$$\hat{Y} = \frac{n\ (H + C + T) - 2G}{(n-1).(n-2)}$$

Donde:

n = tamaño del cuadrado latino
H = total de la hilera con Y perdida
C = total de la columna con Y perdida
T = total del tratamiento con Y perdida
G = Gran total con Y perdida

	Columnas			$Y_{i.}$
HILERA	$\hat{Y}_{11}$	4	5	$Y_{1.}$
	3	2	2	
	4	3	$\hat{Y}_{33}$	
$Y_{.j}$				$Y_{..}$

G.L.	
Columna	2
Hilera	2
Tratam.	2
Error	0 *
Total	6

* El error absorbe los grados de libertad de la parcela perdida.

4.5 CASO DE DOS INFORMACIONES PERDIDAS.

Según metodología de parcela perdidas en el diseño de bloques al azar.

4.51 Adivinar una de ellas.

$$\hat{Y}_{33} \approx 4$$

$$ó \quad \hat{Y}_{33} = \frac{\bar{Y}\text{ col.} + \bar{Y}\text{ hil.} + \bar{Y}\text{ trat.}}{3}$$

4.52 Utilizar la fórmula:

$$\hat{Y}_{11} = \frac{n\ (H + C + T) - G}{(n - 1)(n - 2)}$$

4.53 Estimar $\hat{Y}_{33}$, considerando $\hat{Y}_{11}$ como dato real

Hasta aquí el 1er. ciclo, a partir de esto comenzamos un nuevo ciclo:

Estimar $\hat{Y}_{11}$ con el resultado $\hat{Y}_{33}$ del 1er. ciclo.

Estimar $\hat{Y}_{33}$ con el resultado $\hat{Y}_{11}$ del 2do. ciclo.

Comparar $\hat{Y}_{11}$ y $\hat{Y}_{11}$ de los dos ciclos

a) si son desiguales: $\hat{Y}_{11} \neq \hat{Y}_{11}$ continuar con 3er. ciclo.

b) si son iguales : $\hat{Y}_{11} = \hat{Y}_{11}$ para la interacción

Posteriormente realizamos el análisis de varianza.

G.L.	
Hilera	2
Columna	2
Tratam.	2
Error	0 *
Total	6

5. DISEÑO DE ALTO NUMERO DE RESTRICCIONES.

5.1 CUADRADO GRECO LATINO.

5.11 USOS: Se utiliza en situaciones donde se detecta 3 o más de 3 fuentes de variación, tienen poco uso en biología pero más en experimentos industriales.

5.12 VENTAJAS: Extrae del error experimental una fuente de variación debida al efecto de posición.

5.13 DESVENTAJAS: Pocos grados de libertad para el error experimental, así si el experimento es de 3 tratamientos el error experimental tendrá cero grados de libertad.

5.14 RESTRICCIONES: Los tratamientos que usualmente se designan por letras latinas mayúsculas A, B, C, etc., deben aparecer una sola vez en hileras y en columnas y una sola vez por la posición que se designa por letras minúsculas a, b, c, etc.

5.15 CROQUIS DE CAMPO: El diseño de campo puede presentar la configuración idealizada siguiente:

Aa	Bb	Cc
Cb	Ac	Ba
Bc	Ca	Ab

Modelo estadístico:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \tau_{(k)} + \lambda_{(g)} + \varepsilon_{ij}$$

Donde:

α_i = efecto en hilera $\quad i = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$

β_j = efecto de columna $\quad j = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$

$\tau_{(k)}$ = efecto de tratamiento $\quad k = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$

$\lambda_{(g)}$ = efecto de posición $\quad g = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$

a) Hipótesis considerada:

$H_o : \mu_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \mu_\tau$

H_A : Por lo menos existe diferencia entre 2 medias

b) Criterio de Prueba: "F de Fisher que utiliza la distribución del mismo nombre; es decir,

$$F_c = \frac{\text{CM tratamiento}}{\text{CM error exp.}}$$

c) Cálculo de estimadores: en forma similar al Cuadrado latino.

d) Datos: La información se tabula en forma de matriz, los parciales se tabulan separadamente para letras latinas y para letras griegas.

Cuadro 5.1 Datos tabulados

HILERA	COLUMNAS				
	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	$Y_{1.}$
	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	$Y_{2.}$
	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	Y_{34}	$Y_{3.}$
	Y_{41}	Y_{42}	Y_{43}	Y_{44}	$Y_{4.}$
	$Y_{.1}$	$Y_{.2}$	$Y_{.3}$	$Y_{.4}$	$Y_{..}$

Letras latinas	
$A = Y_{.(1)}$	$a = Y_{.(1)}$
$B = Y_{.(2)}$	$b = Y_{.(2)}$
$C = Y_{.(3)}$	$c = Y_{.(3)}$
$D = Y_{.(4)}$	$d = Y_{.(4)}$
$Y_{..}$	$Y_{..}$

e) Análisis de varianza. Este diseño rompe la variación total en 5 componentes: hileras, columnas, tratamientos, posición y error según el esquema siguiente

Ω VARIACION TOTAL

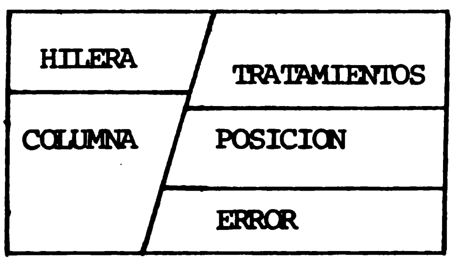

Figura 5.1 Partición en 5 componentes

Cuadro 5.2 Análisis de varianza en cuadrado greco latino

F.V.	S.C.	G.L.
Hilera	$\Sigma Y^2_{i.}/n$ - FC	n - 1
Columna	$\Sigma Y^2_{.j}/n$ - FC	n - 1
Tratamiento	$\Sigma Y^2_{.(k)}/n$ - FC	n - 1
Posición	$\Sigma Y^2_{.(g)}/n$ - FC	n - 1
Error Exp.	Diferencia	(n - 1)(n - 3)
Total	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij}$ - FC	$n^2 - 1$

Ejemplo 5.1 Comparar el rendimiento de 5 tipos de diesel (A, B, C, D, E) para tractores. Utilizando 5 tractoristas en 5 días de la semana y en diferentes períodos del días (a, b, c, d, e). La respuesta se mide en km/galón.

Cuadro 5.3 Rendimiento de 5 tipos de diesel con diferentes tractoristas, días y períodos del día en km/galón.

TRACTO-	DIAS DE LA SEMANA (COLUMNAS)					
RISTAS	1	2	3	4	5	$Y_{i.}$
1	Aa 10	Bc 16	Ce 23	Db 24	Ed 20	93.0
2	Bb 15	Cd 20	Da 25	Ec 20	Ae 18.5	98.5
3	Cc 21.5	De 24	Eb 25	Ad 16.5	Ba 19	106.0
4	Dd 20	Ea 32	Ac 14	Be 18	Cb 27	111.0
5	Ee 30	Ab 12	Bd 17.5	Ca 25	Dc 30	114.5
$Y_{.j}$	96.5	104.0	104.5	103.5	114.5	523.0

$Y_{.(k)}$	$Y_{.(g)}$
TRATAMIENTOS	PERIODOS
A = 71.0	a = 111.0
B = 85.5	b = 103.0
C = 116.5	c = 101.5
D = 123.0	d = 94.0
E = 127.0	e = 113.5
523.0	523.0

Cuadro 5.4 Análisis de varianza y cálculo de estimadores

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Hileras	62.54	4	15.64	
Columnas	33.04	4	8.26	
Tratamiento	495.14	4	123.79	8.45 *
Períodos	48.94	4	12.24	
Error Exp.	117.18	8	14.65	
Total	756.84	24		

$$F.C. = \frac{523^2}{25} = 10941.16$$

$$S.C.\ Hileras = \frac{93^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (114.5)^2}{5} - FC$$

$$= 11003.70 - 10941.16 = 62.54$$

$$SC.\ Columnas = \frac{(96.5)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (114.5)^2}{5} - FC$$

$$= 10974.20 - 10941.16 = 33.04$$

$$SC.\ Tratam. = \frac{71^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 127^2}{5} - FC$$

$$= 11436.30 - 10941.16 = 495.14$$

$$SC.\ Período = \frac{111^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (113.5)^2}{5} - FC$$

$$= 10990.10 - 10941.16 = 48.94$$

$$S.C.\ Error = 10^2 + \ldots + 30^2 - 11003.70 - 10974.20 - 11436.30 - 10990.10 + 3\ FC = 11698.00 - 44404.30 + 32823.48$$

$$= 44521.48 - 44404.30 = 117.18$$

$$S.C.\ Total = 10^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 30^2 - FC$$

$$= 11698.00 - 10941.16 = 756.84$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente

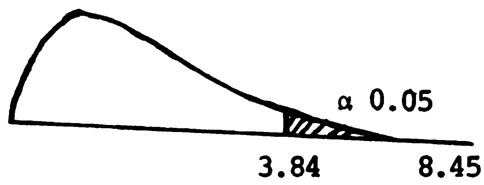

Figura 5.2 Distribución de F con 4 y 8 grados de libertad.

Como $F_c > F_t$, o sea 8.45 > se detecta un resultado significativo que induce a rechazar la hipótesis nula.

5.2 CUADRADO SUPER GRECO LATINO.

Ejemplo 5.2 Comparar el rendimiento de 5 tipos de diesel (A, B, C, D, E) para tractores. Utilizando 5 tractoristas en 5 días de la semana, a diferentes períodos del día (a, b, c, d, e) y 5 marcas de tractores (1, 2, 3, 4, 5). La respuesta se mide en Km/galón.

Cuadro 5.5 Datos tabulados.

TRACTO-RISTAS	DIAS DE LA SEMANA					
	1	2	3	4	5	$Y_{i.}$
1	Aa1 1	Bb2 1	Cc3 6	Dd4 7	Ee5 8	23
2	Ed3 7	Ae4 7	Ba5 3	Cb1 9	Dc2 2	28
3	Db5 4	Ec1 9	Ad2 6	Be3 7	Ca4 11	37
4	Ce2 8	Da3 4	Eb4 13	Ac5 9	Bd1 4	38
5	Bc4 10	Cd5 11	De1 8	Ea2 15	Ab3 9	53
$Y_{.j}$	30	32	36	47	34	$Y_{..}$ 179

$Y_{.(k)}$	$Y_{.(\ell)}$	$Y_{.(m)}$
TRATAMIENTO (MAYUSCULAS)	PERIODOS (MINUSCULAS)	MARCAS (NUMEROS)
A = 32	a = 34	1 = 31
B = 25	b = 36	2 = 32
C = 45	c = 36	3 = 33
D = 25	d = 35	4 = 48
E = 52	e = 38	5 = 35
179	179	179

PROCEDIMIENTO

Modelo estadístico:

$$Y_{ij} = \mu + H_i + C_j + \tau_{(k)} + \rho_{(\ell)} + \theta_{(m)} + \varepsilon_{ij}$$

Donde:

H_i = Efecto de hileras $\quad i = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$

C_j = Efecto de columnas $\quad j = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$

$\tau_{(k)}$ = Efecto de tratamientos $\quad k = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$

$\rho_{(\ell)}$ = Efecto de períodos $\quad \ell = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$

$\theta_{(m)}$ = Efecto de marcas $\quad m = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$

ε_{ij} = Error Experimental

Prueba de hipótesis:

a) Hipótesis: $H_o : \mu_1 = \ldots\ldots\ldots = \mu$

H_A : Por lo menos existe diferencia entre 2 medias.

b) Criterio de prueba: "F de Fisher"

$$F_c = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_E^2}$$, que se comparará con el F_t

c) Cálculo de estimadores: F_c , s_T^2 , s_E^2 ; esto implica calcular la S.C. total, S.C. hileras, S.C. columnas, S.C. tratamientos, S.C. períodos, S.C. marcas y S.C. error experimental.

Cuadro 5.6 Análisis de varianza y cálculo de estimadores

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Hileras	105.36	4	26.34	109.75
Columnas	35.36	4	8.84	36.83
Tratamiento	118.96	4	29.74	123.91 *
Períodos	1.76	4	0.44	1.83
Marcas	38.96	4	9.74	40.58
Error Exp.	0.96	4	0.24	
Total	301.36	24		

$$\text{F.C.} = \frac{179^2}{25} = 1281.64$$

$$\text{S.C. hileras} = \frac{23^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 53^2}{5} - \text{FC}$$

$$= 1387.00 - 1281.64 = 105.36$$

$$\text{SC. Columnas} = \frac{30^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 34^2}{5} - \text{FC}$$

$$= 1317.00 - 1281.64 = 35.36$$

$$\text{S.C. Tratam.} = \frac{32^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 52^2}{5} - \text{FC}$$

$$= 1400.60 - 1281.64 = 118.96$$

$$\text{S.C. Período} = \frac{34^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 38^2}{5} - \text{FC}$$

$$= 1283.40 - 1281.64 = 1{,}76$$

$$\text{S.C. marcas} = \frac{31^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 35^2}{5} - \text{FC}$$

$$= 1320.60 - 1281.64 = 38.96$$

$$\text{S.C. error} = 1^2 + \ldots + 9^2 - 1387 - 1317 - 1400.6 - 1283.4 - 1320.6 + 4\text{FC}$$

$$= 1583.00 - 6708.60 + 5126.56 = 0.96$$

$$S.C.\ total = 1^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 9^2 - FC$$

$$= 1583.00 - 1281.64 = 301.36$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente

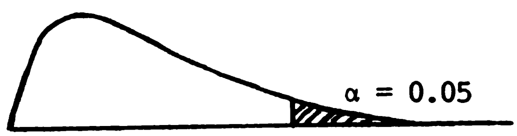

Figura 5.3 Distribución de F con 4 y 4 grados de libertad

Como $F_c > F_t$, o sea 123.91 > 6.93 se detecta un resultado significativo que induce a rechazar la hipótesis nula.

5.3 CUADRADO MAGICO

Ejemplo 5.3 De cierto experimento se obtuvo los datos siguientes:

Cuadro 5.7 Datos tabulados

E = 34	C = 40	B = 37	D = 38	F = 40	A = 45	234
F = 32	A = 36	D = 40	B = 47	E = 35	C = 48	238
B = 38	E = 34	F = 36	C = 33	A = 44	D = 31	216
C = 29	D = 36	A = 40	E = 42	B = 42	F = 38	227
D = 34	F = 36	E = 42	A = 46	C = 40	B = 38	236
A = 30	B = 31	C = 32	F = 41	D = 45	E = 42	221
197	213	227	247	246	242	1372

CUADRADO MAGICO	
219	253
213	230 -
205	252
637	735

TRATAMIENTOS
A = 241
B = 233
C = 222
D = 224
E = 229
F = 223
1372

PROCEDIMIENTO:

Modelo estadístico:

$$Y_{ij} = \mu + H_i + C_j + \tau_{(k)} + \theta_{(\ell)} + \varepsilon_{ij}$$

Donde:

H_i = Efecto de hilera

C_j = Efecto de columna

$\tau_{(k)}$ = Efecto de tratamiento

$\theta_{(\ell)}$ = Efecto del mágico

ε_{ij} = Error experimental

Cuadro 5.7 Análisis de varianza y cálculo de estimadores

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Hilera	65.23	5	13.05	1.43
Columna	344.23	5	68.85	7.53 *
Tratamiento	44.89	5	8.98	0.98n.s.
Mágico	266.78	2	133.39	14.59 *
Error	164.43	18	9.14	
Total	885.56	35		

$$F.C. = \frac{1372^2}{36} = 52288.44$$

$$\text{S.C. hilera} = \frac{234^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 221^2}{6} - FC$$

$$= 52353.67 - 52288.44 = 65.23$$

$$\text{SC. Columna} = \frac{197^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 242^2}{6} - FC$$

$$= 52632.67 - 52288.44 = 344.23$$

$$\text{S.C. Tratam.} = \frac{241^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 223^2}{6} - FC$$

$$= 52333.33 - 52288.44 = 44.89$$

$$\text{S.C. mágico} = \frac{637^2 + 735^2}{18} - FC$$

$$= 52555.22 - 52288.44 = 266.78$$

$$\text{S.C. Error} = 34^2 + \ldots + 42^2 - 52353.67 - 52632.67 - 52333.33 - 52555.22 + 3FC$$

$$= 53174 - 209874.89 + 156865.32 = 164.43$$

$$\text{S.C. Total} = 34^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 42^2 - FC$$

$$= 53174 - 52288.44 = 885.56$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente

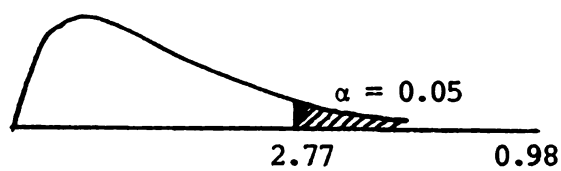

Figura 5.4 Distribución de F con 5 y 18 grados de libertad.

Como $F_c < F_t$, o sea $0.98 < 2.77$ no se detecta un resultado significativo que induce a aceptar la hipótesis nula.

5.4 SUPER MAGICO

Ejemplo 5.4 De cierto experimento se obtuvo los datos siguientes:

Cuadro 5.8 Datos tabulados

COLUMNAS

HILERA							
	D = 68	F = 80	A = 89	E = 68	C = 79	B = 75	459
	B = 94	E = 70	C = 98	F = 63	A = 74	D = 69	468
	C = 66	A = 88	D = 62	B = 76	E = 58	F = 72	422
	E = 85	B = 84	F = 76	C = 58	D = 72	A = 80	455
	A = 91	C = 82	B = 76	D = 67	F = 72	E = 83	471
	F = 97	D = 10	E = 62	A = 65	B = 89	C = 85	408
	501	414	463	397	444	464	2683

SUPER MAGICO (a)	
499	428
461	416
418	461
Σ: 1378	1305

SUPER MAGICO (b)

466	456	427	1349
449	404	481	1334

TRATAMIENTOS
A = 487
B = 494
C = 468
D = 348
E = 426
F = 460
Σ: 2683

Modelo estadístico:

$$Y_{ij} = \mu + H_i + C_j + \tau_{(k)} + M(a)_{(\ell)} + M(b)_{(m)} + \varepsilon_{ij}$$

Donde:

μ = Media común

H_i = Efecto de hilera

C_j = Efecto de columna

$\tau_{(k)}$ = Efecto de tratamiento

$M(a)_{(\ell)}$ = Efecto super mágico (a)

$M(b)_{(m)}$ = Efecto super mágico (b)

ε_{ij} = Error Experimental

Cuadro 5.9 Análisis de varianza y cálculo de estimadores.

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_c
Hilera	561.80	5	112.36	0.45
Columna	1176.47	5	235.29	0.93
Tratamiento	2443.47	5	488.69	1.94
Super Mág. (a)	148.03	2	74.02	0.29
Super Mág. (b)	6.25	2	3.13	0.01
Error	4026.95	16	251.68	
Total	8362.97	35		

$$\text{S.C. Hileras} = \frac{459^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 408^2}{6} - FC$$

$$= 200519.83 - 199958.03 = 561.80$$

$$\text{S.C. Columnas} = \frac{501^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 464^2}{6} - FC$$

$$= 20113.45 - 199958.03 = 1176.47$$

$$\text{S.C. Tratamiento} = \frac{487^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 460^2}{6} - FC$$

$$= 202401.50 - 199958.03 = 2443.47$$

$$\text{SC. Super Mág. (a)} = \frac{1378^2 + 1305^2}{18} - FC$$

$$= 200106.06 - 199958.03 = 148.03$$

$$\text{SC. Super Mág (b)} = \frac{1349^2 + 1334^2}{18} - FC$$

$$= 199964.28 - 199958.03 = 6.25$$

S.C. Error $= 68^2 + \dots\dots\dots + 85^2 - 200519 - 201134.5 - 202401.5$

$- 200106.06 - 199964.28 + 4\ FC$

$= 208321 - 1004126.17 + 799832.12 = 4026.95$

S.C. Total $= 68^2 + \dots\dots\dots + 85^2 - FC$

$= 208321 - 199958.03 = 8362.97$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente

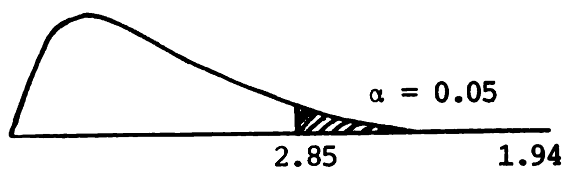

Figura 5.5 Distribución de F con 5 y 16 grados de libertad

Como $F_c < F_t$, o sea $1.94 < 2.85$, no se detecta un resultado significativo que induce a aceptar la hipótesis nula.

6. INTERPRETACION DE RESULTADOS.

6.1 DIFERENCIA MINIMA SIGNIFICATIVA.

Se utiliza unicamente en experimentos donde se planearon anteladamente las comparaciones entre parejas de promedios de tratamientos. Estas comparaciones deben ser ortogonales y planeadas antes de examinar los datos.

Ejemplo 6.1 Suponer los datos experimentales correspondiente a un experimento conducido en diseño irrestricto al azar, los promedios y análisis de varianza se presentan a continuación.

Cuadro 6.1 Promedio de tratamientos.

Tratamientos	Promedios
A	4.0
B	5.0
C	6.7
D	7.0
E	4.7
F	7.3

Cuadro 6.2 Análisis de varianza irrestricto al azar:

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	F
Tratamiento	5	29.11	5.82	3.88
Error	12	18.00	1.50	
Total	17	47.11		

La diferencia mínima significativa, (d.m.s.), fundalmentalmente es una prueba de t de Student que utiliza la varianza combinada es decir:

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{X}}{s_{\bar{d}}}$$

$$s_{\bar{d}} \cdot t = \bar{X} - \bar{X} = \text{d.m.s.}$$

Si la diferencia entre 2 medias es mayor que el producto $(s_{\bar{d}})(t)$, se declara al resultado significativo, si la diferencia es igual o menor que el producto, se declara al resultado no significativo.

$$\text{d.m.s } (0.05) = (t_{0.05})(s_{\bar{d}}) = 2.179 \sqrt{\frac{2(1.5)}{3}} = 2.2$$

Las comparaciones ortogonales planeadas son:

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B = 4.0 - 5.0 = -1.0 \text{ (n.s.)}$$
$$\bar{X}_C - \bar{X}_D = 6.7 - 7.0 = 0.3 \text{ (n.s.)}$$
$$\bar{X}_E - \bar{X}_F = 4.7 - 7.3 = 2.6 \text{ (*)}$$

Unicamente la tercera comparación es significativa ya que 2.6 es mayor que el comparador d.m.s. 2.2.

6.2 PRUEBA DE DUNCAN.

Se usa para comparar cada promedio de tratamiento con cada uno de los otros promedios, es una prueba de rango múltiple. No es necesario realizar la prueba de F ya que la prueba se puede realizar indiferentemente de la significancia de F, la metodología tiene 4 pasos que se ilustra con los datos del ejemplo anterior.

i) Calcular el error estandar de la media.

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\text{CM error}}{n}} = \frac{1.5}{3} = 0.71$$

ii) Calcular los comparadores Duncan, multiplicando los valores tabulares del Cuadro A.7 de Steel y Torrie (pag. 442) por el error estándar. Para 10 grados de libertad del error, $\alpha = 0.05$ y 6 tratamientos; el cálculo luce así:

$$\text{Duncan} = (s_{\bar{x}}).(\text{SSR})_i \qquad i = \{2, 3, \ldots\ldots, t\}$$

Cuadro 6.3 Cálculo del comparador Duncan

Tratamientos	2	3	4	5	6
Valor tabular	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40
Error estandar	0.71	0.71	0.71	0.71	0.71
Comparador Duncan	2.19	2.29	2.36	2.39	2.41

Cuadro 6.4 Promedios tabulados de menor a mayor y tabular en un cuadro de 2 entradas

	(A) 4.0	(E) 4.7	(B) 5.0	(C) 6.7	(D) 7.0	(F) 7.3
(A) 4.0		0.7	1.0	2.7	3.0	3.3
(E) 4.7			0.3	1.0	2.3	2.6
(B) 5.0				1.7	2.0	2.3
(C) 6.7					0.3	0.6
(D) 7.0						0.3
(F) 7.3						

iv) Declarar significativas si las diferencias entre 2 promedios superan al comparador Duncan.

F - A = 2.3 es significativo porque es mayor que 2.19
F - E = 2.6 es significativo porque es mayor que 2.29
D - A = 3.0 es significativo porque es mayor que 2.29
C - A = 2.7 es significativo porque es mayor que 2.36

6.3 METODO TUKEY

Se usa en experimentos que implican un número elevado de comparaciones o se desea usar una prueba más rigurosa que la de Duncan.

Es de fácil cálculo puesto que se define un solo comparador, resultante del producto del error estándar por el valor tabular del Cuadro A.8 de Steel y Torrie.

Ejemplo 6.2 Con los datos del mismo ejemplo se calcula el error estandar y el comparador Tukey.

$$s_{\bar{x}} = 0.71$$

$$\text{Tukey} = (s_{\bar{x}})(q_{\alpha}) = (0.71)(4.75) = 3.37$$

Ninguna de las diferencias entre promedios es significativa, porque siempre son menores que 3.37.

6.4 PRUEBA DE S.N.K.

Es una prueba de rango múltiple similar en metodología a la de Duncan pero, intermedia en cuanto a exigencia se refiere entre Tukey y Duncan; es decir, no es tan exigente como Tukey ni es poco exigente como Duncan especialmente cuando se prueba alto número de tratamientos.

Ejemplo 6. Para los mismos datos, se calcula el error estándar y se usa los valores tabulares del Cuadro A.8.

$$\text{S.N.K.} = (s_{\bar{x}}).(q_{\alpha})_i \qquad i = \{2, 2, \ldots\ldots\ldots, t\}$$

Cuadro 6.5 Cálculo del comparador Tukey

Tratamientos	2	3	4	5	6
Valor tabular	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75
Error estandar	0.71	0.71	0.71	0.71	0.71
Comparador SNK	2.19	2.68	2.98	3.20	3.37

Cuadro 6.6 Promedios tabulados de menor a mayor

	4.0	4.7	5.0	6.7	7.0	7.3
4.0		0.7	1.0	2.7	3.0	3.5
4.7			0.3	1.0	2.3	2.6
5.0				1.7	2.0	2.3
6.7					0.3	0.6
7.0						0.3
7.3						

Ninguna diferencia es significativa al nivel $\alpha = 0.05$

6.5 PRUEBA DE DUNNET.

Se utiliza para comparaciones de los tratamientos con el testigo; es decir, si un experimento prueba 5 tratamientos y un testigo absoluto se puede realizar 5 comparaciones unicamente.

Se calcula el error estandar de la diferencia y se multiplica por el valor tabular del Cuadro A.9 de Steel y Torrie, con grados de libertad del error experimental.

Ejemplo 6. $\text{Dunnet} = (s_{\bar{d}})(D) = (\sqrt{\frac{2(1.5)}{3}})(3.0) = 3.0$

B - A = 0.7 n.s.
C - A = 1.0 n.s.
D - A = 2.7 n.s.
E - A = 3.0 n.s.
F - A = 3.3 *

6.6 COMPARACION DE CLASES POR CONTRASTES

Los tratamientos totales pueden expresarse como una función lineal de la siguiente manera:

Función lineal: $Q = C_1T_1 + C_2T_2 + C_3T_3 + C_4T_4 + \ldots\ldots + C_iT_i$

Donde:

T_i = Totales de tratamiento

C_i = Ciertos coeficientes; (0, 1, 2, 3, ..., etc.). Conforme al agrupamiento propuesto.

n = número de observaciones

Si la suma $C_i = 0$, se dice que se ha definido un contraste.

Si Q es un contraste la suma de cuadrados de este contraste queda definido por la relación:

$$S.C.Q_i = \frac{(\Sigma Q_i)^2}{n\Sigma C_i^2}$$

Para realizar la partición de la suma de cuadrados de tratamientos, se debe demostrar previamente la ortogonalidad de los contrastes.

$$S.C.\ trat. = S.C.Q_1 + S.C.Q_2 + S.C.Q_3 + \ldots\ldots + S.C.Q_i$$

Sea Q_1 el contraste $Q_1 = -3 + 1 + 1 + 1$

Sea Q_2 otro contraste $Q_2 = 0 + 0 - 1 + 1$

Para que Q_1 y Q_2 sean ortogonales debe cumplirse la condición:

$$\Sigma C_1 \cdot C_2 = 0.$$

Es decir:

$$
\begin{array}{rl}
Q_1 = & -3 + 1 + 1 + 1 \\
Q_2 = & 0 + 0 - 1 + 1 \\
\hline
& 0 \quad 0 - 1 + 1 = \Sigma = C_1C_2 = 0
\end{array}
$$

La suma de cuadrados de tratamientos se puede partir en tantas partes como G.L. existen en tratamientos.

El análisis de varianza, arroja 3 G.L. para tratamientos, en consecuencia la S.C. y los grados de libertad, puede partirse en 3 componentes.

Cuadro 6.7 Análisis de varianza

F.V.	G.L.		S.C.	
Tratamiento	3		25.42	
		1		Q_1
		1		Q_2
		1		Q_3
Error	12			
Total	15			

Ejemplo 6.3 Considerar los datos siguientes que corresponden a un experimento con diseño irrestricto al azar.

Cuadro 6.8 Promedio de tratamientos.

Tratamiento	Promedio	Totales
A	427	1281
B_1	777	2331
B_2	890	2670
C_1	1000	3000
C_2	803	2409

Cuadro 6.9 Análisis de varianza irrestricto al azar

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	F_c
Tratamiento	4	557693	139423	122.30
Error	10	11400	1140	
Total	14			

Cuadro 6.10 Contrastes ortogonales

CONTRASTE	A 1280	B1 2330	B2 2670	C1 3000	C2 2410	Q	$Q^2/n\Sigma C_i^2$
A v otros	4	-1	-1	-1	-1	-5290	466401.7
B v C	0	+1	+1	-1	-1	- 460	14008.3
B1 v B2	0	+1	-1	0	0	- 340	19266.7
C1 v C2	0	0	0	+1	-1	590	58016.7

Las 4 comparaciones son ortogonales.

Cuadro 6.11 Análisis de varianza final

F.V.	G.L.		S.C.		F
Tratamientos	4		557693		
A v otros		1		466402	40.91
B v C		1		14008	1.23
B1 v B2		1		19266	1.69
C1 v C2		1		58017	5.09
Error	10		11400		
Total	14				

Se concluye que los tratamientos difieren de A (testigo) y C_1 es diferente estadísticamente de C_2

Ejemplo 6.4 Intervalos igualmente espaciados

Cuadro 6.12 Datos de experimento con niveles de nitrógeno

Tratamiento	I	II	III	$\bar{X}$
1 N - 0.0	400.00	450.00	430.00	426.67
2 N - 20.0	800.00	750.00	780.00	776.67
3 N - 40.0	900.00	920.00	850.00	890.00
4 N - 60.0	1000.00	1050.00	950.00	1000.00
5 N - 80.0	800.00	780.00	830.00	803.33
Σ:	3900.00	3950.00	3840.00	

Cuadro 6.13 Análisis de varianza en bloque al azar

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	F
Repeticiones	2	1213.33	606.66	0.47
Tratamientos	4	557693.33	130423.33	109.49
Error	8	10186.67	1273.33	
Total	14	569093.33		

Cuadro 6.14 Contrastes ortogonales

Contrastes	427	777	890	1000	803	Componente	D	bi
Lineal	-2	-1	0	1	2	976.65	10	97.66
Cuadrático	2	-1	-2	-1	2	-1096.67	14	-78.33
Cúbico	-1	2	0	-2	1	- 70.00	10	- 7.00
Cuártico	1	-4	6	-4	1	- 536.68	70	- 7.67

Los coeficientes de las funciones se obtienen del Cuadro 6.10 polinomios ortogonales de acuerdo al número de tratamientos y grados de polinomios.

Promedio general $\bar{Y} = 779.33$

Función lineal $\hat{Y} = 779.33 + 97.66\ (x_1)$ $X_1 = \{-2,-1,0,1,2\}$

548.01 = " + " (-2)

974.65 = " + " (2)

Función Cuad. $Y = 779.33 + 97.66\ (X_1) - 78.333\ (X_2)$ $X_2 = \{2,-1,-2,-1,2\}$

427.35 = " + " (-2)- " (2)

760.00 = " + " (-1)- " (-1)

935.00 = " + " (0)- " (-2)

955.32 = " + " (1)- " (-1)

817.99 = " + " (2)- " (2)

Representación gráfica de los resultados.

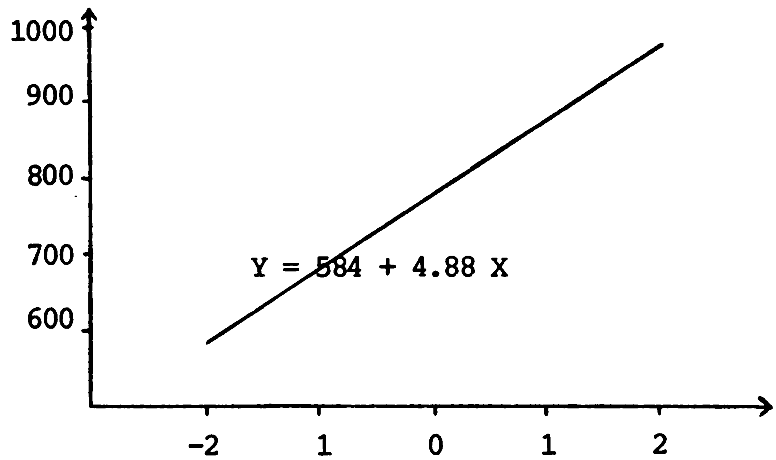

Figura 6.1 Función lineal de respuesta al Nitrógeno.

Para descodificar tasas:

$$Y = 779.33 + 97.66 \left(\frac{X - \bar{X}}{I}\right)$$

$$\hat{Y} = 584 + 4.88X \qquad X = \{0, 20, 40, 60, 80\}$$

$$Y = 779.33 + 97.66 \left(\frac{X - \bar{X}}{I}\right) - 78.333 \left[\frac{X - \bar{X}^2}{I} - \frac{t^2 - 1}{12}\right]$$

$$\hat{Y} = 427.35 + 20.54X - 0.1958X^2$$

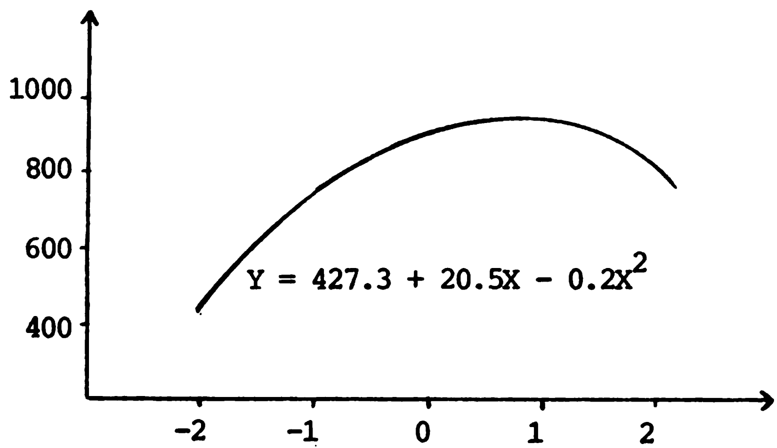

Figura 6.2 Función cuadrática de respuesta al nitrógeno

La producción máxima física se obtiene derivando la función de respuesta con respecto al insumo Nitrógeno.

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = - \frac{b_1}{2b_2} = 52.45$$

La cantidad del insumo que maximiza el beneficio se obtiene así:

Beneficio = producto - costos

Donde:

Producto = (Y) (vY)

Costo = C_0 + (X) (vX)

vX = 4¢ / kilo

vY = 1¢ / kilo

Beneficio = (Y) (vY) - C_0 - (X) (vX)

$$\frac{\partial B}{\partial X} = \frac{\partial 4}{\partial X} vY - vX = 0$$

$$b_1X = 2b_2X = \frac{vX}{vY}$$

$$\hat{X} = \frac{4 - b_1}{2b_2} = 42.25$$

El retorno neto a la inversión también se obtiene por derivación:

$$RNI = \frac{Y - C}{C} = 0$$

$$\frac{\partial RNI}{\partial X} = \frac{Y \frac{\partial C}{X} - C \frac{\partial Y}{X}}{C^2} = 0$$

$$RNI = \sqrt{(\frac{C_0}{C_1} + \hat{X})^2 - (\hat{X})^2 - \frac{C_0}{C_1}}$$

$$RNI = \sqrt{(\frac{10}{4} + 52.45)^2 - (52.45)^2 - \frac{10}{4}} = 16.31$$

Cuadro 6.15 Coeficientes y Divisor para polinomios ortogonales

Grado de poly-nomial	Comparación	Número de niveles 1	2	3	4	5	6	7	Divisor $\Sigma\lambda^2$
1	Lineal	-1	+1						2
2	Lineal	-1	0	+1					2
	Cuadrático	+1	-2	+1					6
3	Lineal	-3	-1	+1	+3				20
	Cuadrático	+1	-1	-1	+1				4
	Cúbico	-1	+3	-3	+1				20
4	Lineal	-2	-1	0	+1	+2			10
	Cuadrático	+2	-1	-2	-1	+2			14
	Cúbico	-1	+2	0	-2	+1			10
	Cuártico	+1	-4	+6	-4	+1			70
5	Lineal	-5	-3	-1	+1	+3	+5		70
	Cuadrático	+5	-1	-4	-4	-1	+5		84
	Cúbico	-5	+7	+4	-4	-7	+5		180
	Cuártico	+1	-3	+2	+2	-3	+1		28
	Quintico	-1	+5	-10	+10	-5	+1		252
6	Lineal	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	28
	Cuadrático	+5	0	-3	-4	-3	0	+5	84
	Cúbico	-1	+1	+1	0	-1	-1	+1	6
	Cuártico	+3	-7	+1	+6	+1	-7	+3	154
	Quintico	-1	+4	-5	0	+5	-4	+1	84
	Sextico	+1	-6	+15	-20	+15	-6	+1	924

7. DISEÑO DE TRATAMIENTOS

7.1 FACTORIALES

En los capítulos 2, 3, 4, y 5 se consideró unicamente un factor o variable controlada, por ejemplo, Nitrógeno con 0, 10, 20 kilos por parcela experimental.

En la realidad se acostumbra trabajar con más de un factor. Es decir, los niveles de Nitrógeno se puede investigar junto a diferentes variedades de frijol, con el objeto de detectar si la respuesta es o no similar para cada una de las variedades, como se ilustra a continuación:

	NITROGENO		
VARIEDAD	0 kg/ha	50 kg/ha	100 kg/ha
Turrialba	T	T	T
Negra	N	N	N
Híbrida	H	H	H

Por la naturaleza de los tratamientos pueden ser:

a) Combinación de cualitativos:
Ejemplos: Variedades x insecticidas

b) Pueden ser mixtas:
Variedades x niveles de P

c) Totalmente cuantitativos:
Niveles de N x niveles de P

Los insumos reciben el nombre genérico de factores y niveles, la subclasificación de cada uno de los factores. No se trata pues de un nuevo diseño de experimentos, es simplemente un arreglo de tratamientos por factores y niveles. Los diseños en si y por tanto sus modelos son los mismos que se definieron en los capítulos anteriores.

7.2 CLASIFICACION DE LOS FACTORIALES.

Se clasifica en:

i) Serie pura : 2^k: 2^1, 2^2, 2^4, 2^5, etc.
3^k: 3^1, 3^2, 3^4, 3^5, etc.
4^k: 4^1, 4^2, , etc.

ii) Serie mixta: es la combinación de los anteriores entre si, tiene la forma $2^k.4.5$

Donde:
k = Factores
2, 3, 4 = Niveles

Algunas configuraciones de la serie 2^k.

El factorial 2^2 implica el uso de 2 factores con 2 niveles en cada factor que se representa en los cuadros y figuras siguientes:

Cuadro 7.1 2 Factores a 2 niveles

NIVEL	FACTOR N	FACTOR P
0	n_0	p_0
1	n_1	p_1

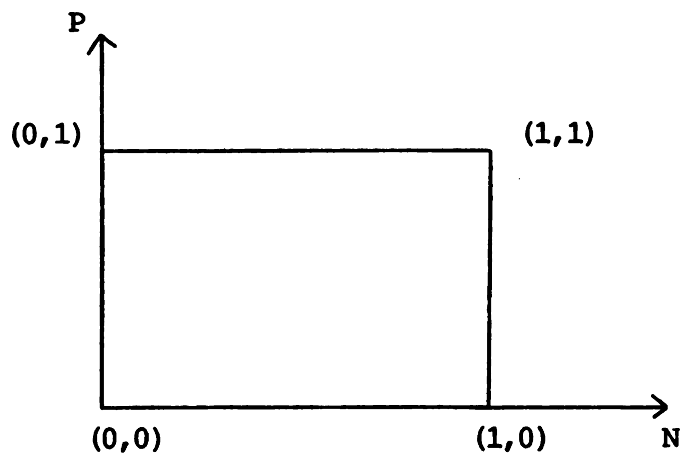

Figura 7.1 Representación gráfica del factorial 2^2

Cuadro 7.2 Lista de tratamientos.

No.	TRATAMIENTOS (a)	(b)	(c)
1	$n_0\ p_0$	00	1
2	$n_0\ p_1$	01	p
3	$n_1\ p_0$	10	n
4	$n_1\ p_1$	11	np

Estos 4 tratamientos constituyen el arreglo factorial de tratamientos, para experimentos en cualquiera de los diseños anteriores.

El factorial 2^3 implica tres factores con 2 niveles cada uno, esquemáticamente se tiene:

Cuadro 7.3 Factorial 2^3

		FACTOR		
		N	P	K
NIVEL	0	n_0	p_0	k_0
	1	n_1	p_1	k_1

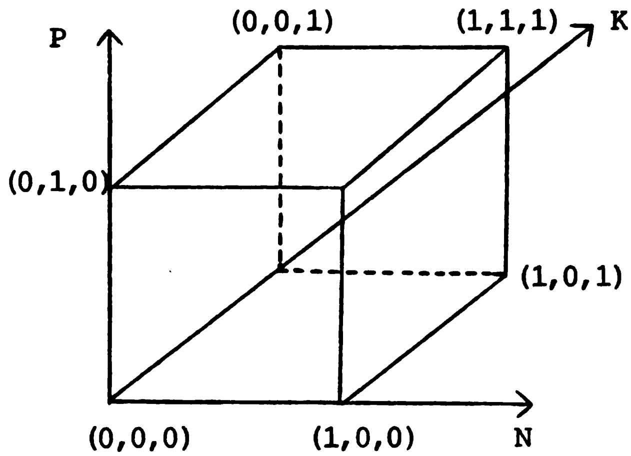

Figura 7.2 Representación espacial de 2^3

Cuadro 7.4 Lista de tratamientos

No.	TRATAMIENTOS (a)	(b)	(c)
1	$n_0\ p_0\ k_0$	000	(1)
2	$n_0\ p_0\ k_1$	001	k
3	$n_0\ p_1\ k_0$	010	p
4	$n_0\ p_1\ k_1$	011	pk_0
5	$n_1\ p_0\ k_0$	100	n
6	$n_1\ p_0\ k_1$	101	nk
7	$n_1\ p_1\ k_0$	110	np
8	$n_1\ p_1\ k_1$	111	npk

En el caso de 2^4 requerimos 16 tratamientos, esto constituye una limitación ya que el diseño (BCR) sería demasiado grande. Por lo tanto el factorial tiene este inconveniente a medida que se aumentan los factores se genera un número altísimo de tratamientos.

La serie 3^k puede tomar las siguientes configuraciones:

El factorial 3^2 consta de 2 factores con 3 niveles cada uno como se esquematiza a continuación:

Cuadro 7.5 2 Factores a 3 niveles.

		FACTOR	
		A	B
NIVEL	0	a_0	b_0
	1	a_1	b_1
	2	a_2	b_2

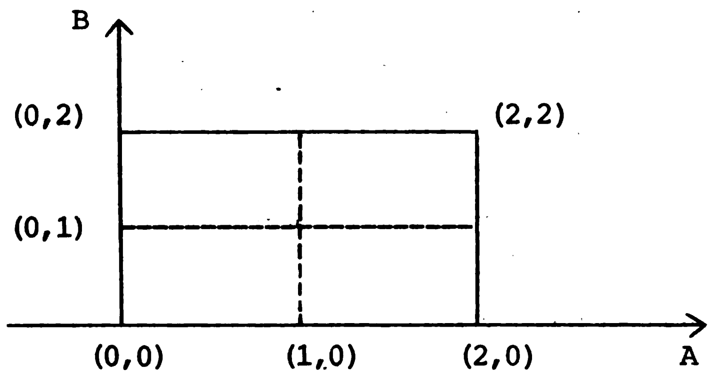

Figura 7.3 Representación gráfica del 3^2

Cuadro 7.6 Lista de tratamientos

	TRATAMIENTOS	
No.	(a)	(b)
1	$a_0\ b_0$	00
2	$a_0\ b_1$	01
3	$a_0\ b_2$	02
4	$a_1\ b_0$	10
5	$a_1\ b_1$	11
6	$a_1\ b_2$	12
7	$a_2\ b_0$	20
8	$a_2\ b_1$	21
9	$a_2\ b_2$	22

El factorial 3^3 implica 3 factores con 3 niveles cada uno.

Cuadro 7.7 Factorial 3^3

		FACTOR		
		A	B	C
NIVEL	0	a_0	b_0	c_0
	1	a_1	b_1	c_1
	2	a_2	b_2	c_2

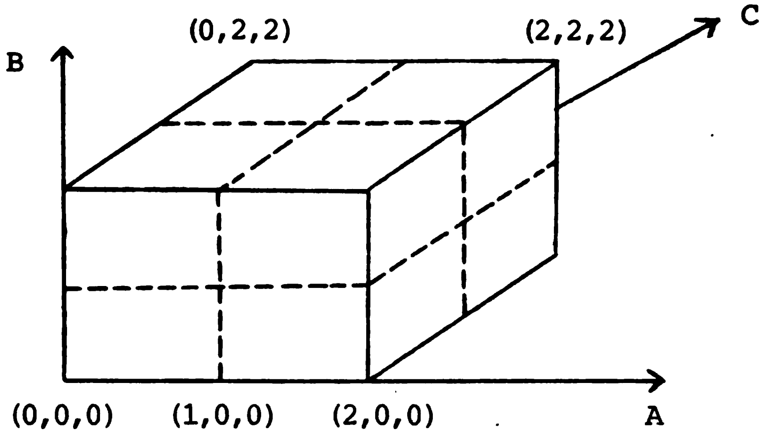

Figura 7.4 Representación espacial del factorial 3^3

Cuadro 7.8 Lista de tratamientos en promedio

No.	TRATAMIENTOS (a)	(b)
1	$a_0\ b_0\ c_0$	000
2	$a_0\ b_0\ c_1$	001
3	$a_0\ b_0\ c_2$	002
4	$a_0\ b_1\ c_0$	010
5	$a_0\ b_1\ c_1$	011
6	$a_0\ b_1\ c_2$	012
7	$a_0\ b_2\ c_0$	020
8	$a_0\ b_2\ c_1$	021
9	$a_0\ b_2\ c_2$	022
⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮
27	$a_2\ b_2\ c_2$	222

El factorial 3^4 implica 81 tratamientos por lo que es más conveniente arreglar los tratamientos en la forma siguiente:

a) La metodología de los tratamientos totalmente confundidos, parcialmente confundidos y fraccionados.

b) Metodología de superficie de respuesta.

Ejemplo 7.1 Arreglo factorial 2^3.

Se condujo un experimento (fertilización en maíz), utilizando como insumos N, p, S. Los niveles de fertilización para cada insumo fue de 50 y 100 kg/ha. El ensayo fue conducido bajo el diseño de bloques al azar. Se desea el efecto de los tratamientos, traducido en el rendimiento de maíz por unidad de área.

Metodología:

Factores	Niveles	Tratamientos
N	n_0 = 50 kg/ha	1) $n_0\ p_0\ s_0$
	n_1 = 100 kg/ha	2) $n_0\ p_0\ s_1$
P	p_0 = 50 kg/ha	3) $n_0\ p_1\ s_0$
	p_1 = 100 kg/ha	4) $n_0\ p_1\ s_1$
S	s_0 = 50 kg/ha	5) $n_1\ p_0\ s_0$
	s_1 = 100 kg/ha	6) $n_1\ p_0\ s_1$
		7) $n_1\ p_1\ s_0$
		8) $n_1\ p_1\ s_1$

Cuadro 7.9 Experimento tabulado

TRATA-MIENTOS	BLOQUES I	II	III	IV	V	Y_i	Y_i^2
1	2	3	2	4	2	13	169
2	3	4	5	6	3	21	441
3	6	2	7	5	6	26	676
4	4	3	2	5	3	17	289
5	2	1	2	4	1	10	100
6	6	7	5	4	3	25	625
7	1	2	1	1	2	7	49
8	5	4	3	2	6	20	400
Y_{ij}	29	26	27	31	26	139	2749

i) Modelo estadístico: $Y_i = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

ii) Análisis de varianza (preliminar); según modelo: bloques al azar.

Cuadro 7.10 Análisis de varianza preliminar

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	F_c	
Bloques	4	2.30	0.60	0.30	n.s.
Tratamiento	7	66.80	9.54	4.87	*
Error	28	54.82	1.96		
Total	39	124.00			

$$F.C. = \frac{139^2}{40} = 483.03$$

iii) Análisis de varianza como factorial. Conforme al arreglo factorial de tratamientos. Para ello se construye previamente el cuadro de contrastes, con la finalidad de hallar la suma de cuadrados de los contrastes.

Cuadro 7.11 Cuadro de contrastes

CONTRASTE	$T_{1.}$ 13	$T_{2.}$ 21	$T_{3.}$ 26	$T_{4.}$ 17	$T_{5.}$ 10	$T_{6.}$ 25	$T_{7.}$ 7	$T_{8.}$ 20
N	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1
P	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1
S	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1
NP	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
NS	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
PS	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
NPS	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1

Continuación Cuadro 7.11

CONTRASTE	(+)	(-)	Q_i	Q_i^2	$n\Sigma C_i^2$	S.C.
N	62	77	-15	225	40	5.63
P	70	69	1	1	40	0.03
S	83	56	27	729	40	18.23
NP	61	78	-17	289	40	7.23
NS	84	55	29	841	40	21.03
PS	60	79	-19	361	40	9.03
NPS	77	62	15	225	40	5.63
						66.81

Cuadro 7.12 Análisis de varianza final

F.V.	G.L.		S.C.		C.M.	F_c	
Bloques	4		2.38		0.60	0.30	n.s.
Tratamientos	7		66.80		9.54	4.87	*
N		1		5.63	5.63	2.87	n.s.
P		1		0.03	0.03	0.02	n.s.
S		1		18.23	18.23	9.30	*
NP		1		7.23	7.23	3.23	n.s.
NS		1		21.03	21.03	10.73	*
PS		1		9.03	9.03	4.61	*
NPS		1		5.63	5.63	2.87	n.s.
Error Exp.	28		54.82				
Total	39		124.00				

iv) Interpretación:

En vista de que algunas interacciones, entre ellas NP y PS son significativas, la interpretación se realizará ignorando los efectos principales (N, P, S).

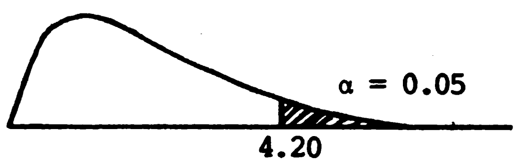

Figura 7.5 Distribución de F con 1 y 28 grados de libertad

Ejemplo 7.2 Arreglo factorial 2^3 totalmente confundido.

En el bloque I, II, III, se confunde la interacción NPK. Total 3 bloques y 6 sub-bloques.

Cuadro 7.13 Rendimiento de soya (Tn/Ha.)

Bloques	I		II		III	
Sub-bloque	I_a	I_b	II_a	II_b	III_a	III_b
Efecto conf.	$(NPK)_0$	$(NPK)_1$	$(NPK)_0$	$(NPK)_1$	$(NPK)_0$	$(NPK)_1$
Datos:	000 = 2	111 = 3	010 = 3	101 = 1	001 = 3	011 = 2
	110 = 3	010 = 4	001 = 2	011 = 1	111 = 4	000 = 2
	101 = 2	001 = 2	111 = 3	110 = 2	100 = 6	101 = 3
	011 = 2	100 = 5	100 = 5	000 = 1	010 = 4	110 = 3
Total		23		18		27

Cuadro 7.14 Cálculo de contrastes

CONTRASTE	000 5	001 7	010 11	011 5	100 16	101 6	110 8	111 10	Q_i	Q_i^2	$n\Sigma C_i^2$	S.C.
N	-	-	-	-	+	+	+	+	12	144	24	6.00
P	-	-	+	+	-	-	+	+	0	0	24	0.00
K	-	+	-	+	-	+	-	+	-12	144	24	6.00
NP	+	+	-	-	-	-	+	+	- 8	64	24	2.67
NK	+	-	+	-	-	+	-	+	- 4	16	24	0.67
PK	+	-	-	+	+	-	-	+	4	16	24	0.67
NPK	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-
Total												16.01

Modelo estadístico:

$Y_i = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ (arreglo factorial 2^3 totalmente confundido).

Prueba de hipótesis:

a) **Hipótesis:** $H_o : \mu_1 = ... = \mu_\tau$

H_A : por lo menos existe diferencia entre 2 medias.

Criterio de prueba: "F de Fisher"

$$F_c = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_E^2}\text{, que se comparará con el } F_t$$

Cálculo de estimadores: F_c , s_T^2 , s_E^2

Cuadro 7.15 Análisis de varianza

F.V.	G.L.		S.C.		C.M.	F_c	
Réplica	2		5.08		2.54	0.39	n.s.
NPK	1		4.16		4.16	0.64	n.s.
Error (a)	2		13.09		6.55		
Tratamiento	6		16.01		2.67		
N		1		6.00	6.00	75.00	*
P		1		0.00	0.00	0.00	n.s.
K		1		6.00	6.00	75.00	*
NP		1		2.67	2.67	33.38	*
NK		1		0.67	0.67	8.38	*
PK		1		0.67	0.67	8.38	*
Error	12		0.99		0.08		
Total	23		39.33				

Cuadro 7.16 Interacción réplica por NPK

	REPLICAS			
	I	II	III	TOTAL
$(NPK)_0$	9	13	17	39
$(NPK)_1$	14	5	10	29
Total	23	18	27	68

$$F.C. = \frac{68^2}{24} = 192.67$$

$$\text{S.C. Réplicas} = \frac{23^2 + 18^2 + 27^2}{8} - FC$$

$$= \frac{529 + 324 + 729}{8} - 192.67$$

$$= 197.75 - 192.67 = 5.08$$

$$\text{S.C. NPK} = \frac{39^2 + 29^2}{12} - FC$$

$$= \frac{1521 + 841}{12} - 192.67$$

$$= 196.83 - 192.67 = 4.16$$

$$\text{SC. Error (a)} = \frac{9^2 + \ldots\ldots + 18^2}{4} - \text{SC Réplica} - \text{SC. NPK} + FC$$

$$= \frac{81 + 169 + \ldots\ldots + 100}{4} - 197.75 - 196.83 + FC$$

$$= 215 - 197.75 - 196.83 + 192.67 = 13.09$$

$$\text{S.C. N} = \frac{144}{24} = 6.00 \qquad \text{(Por contraste)} \ \frac{Q_i^2}{n\Sigma C_i^2}$$

$$\text{S.C. P} = \frac{0}{24} = 0.00$$

$$\text{S.C. K} = \frac{144}{24} = 6.00$$

$$\text{S.C. NP} = \frac{64}{24} = 2.67$$

$$\text{S.C. NK} = \frac{16}{24} = 0.67$$

$$\text{S.C. PK} = \frac{16}{24} = 0.67$$

$$\text{S.C. Trat.} = \text{SC. N} + \text{SC. P} + \text{SC. K} + \text{SC. NP} + \text{SC. NK} + \text{SC. PK}$$

$$= 16.01$$

$$S.C.\ Total = 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots.. + 3^2 - FC$$

$$= 232 - 192.67 = 39.33$$

$$S.C.\ Error = SC.\ T - SC.\ R - SC.\ NPK - SC.\ Error\ (a) - SC.\ Trat.$$

$$= 39.33 - 5.08 - 4.16 - 16.01$$

$$= 39.33 - 38.34 = 0.99$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente.

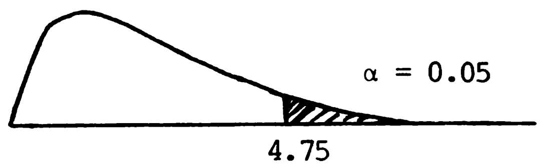

Figura 7.6 Distribución de F con 1 y 12 grados de libertad

Los efectos principales N y K son significativos al 5%, asi mismo las interacciones NP, NK, PK.

7.3 PARCELAS DIVIDIDAS.

Es un arreglo factorial de tratamientos.
Se caracteriza por que:

a) Los factores están medidos con diferente grado de precisión

b) El tamaño de parcela es también diferente para cada uno de los factores.

c) Tiene diferentes errores experimentales.

Factores	Niveles	Factores	Niveles	Lista de Trat.
	N_0		V_1	$n_0\ v_1$
N	N_1	V	V_2	$n_0\ v_2$
	N_2		V_3	$\vdots\ \ \vdots$
			V_4	$n_2\ v_4$
Parcela pequeña		Parcela grande		Unidad experim.

La asignación del tamaño de parcela a los factores se hace en función de la precisión, si el N tiene mayor importancia con relación a variedades; la mayor precisión se asignará al factor N. (mayor número de observaciones), es decir, los niveles de N constituyen las parcelas pequeñas y variedades las grandes.

Cuadro 7.17 Croquis (B.C.R.)

	I			II	III
V_1	n_2	n_0	n_1		
V_2	n_1	n_0	n_2		
V_3		$\vdots$			
V_4		$\vdots$			

La mayor precisión se consigue sacrificando precisión en el otro factor.

Modelo estadístico: Es función del diseño de experimentos.

La partición de la variabilidad se realiza teniendo en cuenta el modelo.

Cuadro 7.18 Análisis de varianza.

	F.V.	G.L.
	Bloques	(n - 1)
Parcelas grandes	Variedades	(v - 1)
	Error (a)	(n-1) (v-1)
	Nitrógeno	(n - 1)
Parcelas pequeñas	VN	(v-1) (n-1)
	Error (b)	v(n-1) (n-1)
	Total	nvn - 1

Ejemplo 7.3 Parcelas divididas en bloques completamente al azar, un arreglo factorial de tratamientos con: 3 dosis de Nitrógeno para 2 alturas de plantas. i:e: 6 tratamientos.

Cuadro 7.19 Experimento tabulado

	I		II		III	
	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2
N_1	3	1	4	2	3	1
N_2	5	3	5	3	4	1
N_3	9	6	6	4	9	2
Total		27		24		20

Modelo estadístico:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} + \alpha_k + (\alpha.\beta)_{ik} + \theta_{ijk}$$

Para la partición de la variación total, se requieren tabulaciones adiciones:

Cuadro 7.20 Para parcelas grandes

	I	II	III	Σ
N_1	4	6	4	14
N_2	8	8	5	21
N_3	15	10	11	36
Σ:	27	24	20	71

Cuadro 7.21 Para parcelas pequeñas

	A_1	A_2	Σ:
N_1	10	4	14
N_2	14	7	21
N_3	24	12	36
Σ:	48	23	71

Cuadro 7.22 Análisis de varianza

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	F	
Parcelas grandes					
Bloques	2	4.11	2.06	1.14	n.s.
Nitrógeno = N	2	42.11	21.06	11.64	*
Error (a)	4	7.22	1.81		
Parcelas pequeñas					
Altura = A	1	34.72	34.72	28.46	*
N x A	2	3.44	1.72	1.41	n.s.
Error (b)	6	7.34	1.22		
Total	17	98.94			

$$\text{F.C.} = \frac{71^2}{16} = 280.06$$

$$\text{S.C. Bloque} = \frac{27^2 + 24^2 + 20^2}{6} - \text{FC}$$

$$= 284.17 - 280.06 = 4.11$$

$$\text{S.C. Nitrog.} = \frac{14^2 + 21^2 + 36^2}{6} - \text{FC}$$

$$= 322.17 - 280.06 = 42.11$$

$$\text{S.C. Error (a)} = \frac{4^2 + 6^2 + \ldots\ldots + 11^2}{2} - \text{SC. B} - \text{SC. N} + \text{FC}$$

$$= 613.56 - 606.34 = 7.22$$

$$\text{S.C. Altura} = \frac{48^2 + 23^2}{9} - \text{FC}$$

$$= 314.78 - 280.06 = 34.72$$

SC. (N x A) $= \dfrac{10^2 + \ldots\ldots + 12^2}{3} - \text{SC. N} - \text{SC. A} + \text{FC}$

$= 640.39 - 636.95 = 3.44$

S.C. Total $= 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots\ldots + 2^2 - \text{FC}$

$= 379.00 - 280.06 = 98.94$

S.C. Error (b) $= 98.94 - 91.60 = 7.34$ Por diferencia

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$ generalmente.

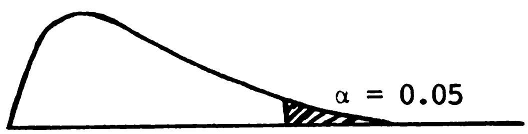

Figura 7.7 Distribución de F con 2 y 4 grados de libertad

Se detecta un valor significativo al 5% para el efecto de Nitrógeno y el efecto de altura.

8. COVARIANZA

8.1 COVARIANZA EN DISEÑO IRRESTRICTO AL AZAR.

La covarianza es la técnica estadística que controla el error experimental basado en la regresión simple y el análisis de varianza.

8.11 USOS: Se utiliza en la interpretación de resultados, para aumentar la precisión del experimento, ajustar promedios de tratamientos con diferentes valores de la variable independiente y para estimar parcelas perdidas.

8.12 VENTAJAS: Permite realizar pruebas de hipótesis de los promedios de tratamientos ajustados por la variable independiente.

8.13 DESVENTAJAS: El cálculo numérico se complica a medida que se aumenta el número de variables independientes, ya que requiere un análisis de regresión y varianza conjunto.

8.14 MODELO ESTADISTICO: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(X_{ij} - \bar{X}) + \varepsilon_{ij}$

Donde:

Y_{ij} = Observación individual

X_{ij} = variable cancomitante $j = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n\}$

τ_i = efecto de tratamiento $i = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, t\}$

β = coeficiente de regresión lineal

ε_{ij} = error

8.15 DATOS: La información numérica se obtiene del libro de campo y se tabula como matriz superpuesta de 2 dimensiones, una corresponde a la variable cancomitante X y la otra a la variable Y.

Cuadro 8.1 Representación simbólica de los datos Y_{ij}

TRATA-MIENTOS	OBSERVACIONES			SUMAS $X_{i.}$	$Y_{i.}$
A	X_{11} Y_{11}	X_{12} Y_{12}	X_{13} Y_{13}	$X_{1.}$	$Y_{1.}$
B	X_{21} Y_{21}	X_{22} Y_{22}	X_{23} Y_{23}	$X_{2.}$	$Y_{2.}$
C	X_{31} Y_{31}	X_{32} Y_{32}	X_{33} Y_{33}	$X_{3.}$	$Y_{3.}$
N	X_{n1} Y_{n1}	X_{n2} Y_{n2}	X_{n3} Y_{n3}	$X_{n.}$	$Y_{n.}$
				$X_{..}$	$Y_{..}$

Con los datos anteriores se puede realizar 3 análisis: un análisis de varianza con la variable X, otro con Y y un análisis de los productos cruzados XY, es decir:

Las sumas de cuadrados debido a regresión y ajustado se calculan con base en el error y tratamientos + error (Total); es decir; las sumas de cuadrados Eyy y Tyy deben ser ajustados por la regresión lineal, la diferencia entre estas sumas de cuadrados ajustados dan lugar a la suma de cuadrados de tratamientos ajustados.

8.16 AJUSTE DE PROMEDIO DE TRATAMIENTOS: Se realiza utilizando la relación:

$\hat{\bar{Y}}_{i.}$ = tratamiento promedio ajustado

$\bar{Y}_{i.}$ = tratamiento promedio sin ajustar

b_{yx} = coeficiente de regresión lineal

$\bar{X}_{i.}$ = promedio de la covariable para cada t_i

$\bar{X}_{..}$ = promedio general de la covariable

8.17 ERROR ESTANDAR PARA TRATAMIENTOS AJUSTADOS:

$$s_{\hat{\bar{Y}}_{i.}} = s_{yx} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2}{exx}}$$

8.18 ERROR ESTANDAR DE LA DIFERENCIA ENTRE TRATAMIENTOS:

i) Fórmula de Wishapt, para los tratamientos a y b por ejemplo:

$$s_{\bar{d}} = \sqrt{s_{yx}^2 \; \frac{2}{n} + \frac{(\bar{X}_{a.} - \bar{X}_{b.})^2}{exx}}$$

ii) Fórmula de Finney, para comparar cualquier pareja.

$$s_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{2s_{yx}^2}{\;} \; 1 + \frac{t_{xx}}{(t-1)\,(exx)}}$$

La primera fórmula requiere cálculo individual para cada comparación, la segunda es única y viene a ser un promedio.

Ejemplo 8.1 Covarianza simple para diseño irrestricto al azar.

Cuadro 8.3 Peso de la materia seca de frijol a los 30 días por unidad experimental (gramos) (Y).

TRATA-MIENTOS (i)	OBSERVACIONES (j) 1	2	3	4	5	6	$Y_{i.}$	$\bar{Y}_{i.}$
A	2.9	3.5	4.1	3.9	3.0	3.5	20.90	3.48
B	3.0	3.6	3.7	3.8	3.1	3.3	20.50	3.42
C	3.1	3.8	4.2	3.1	3.5	3.2	20.90	3.48
D	4.5	4.4	3.8	4.7	4.1	5.0	26.50	4.42
E	6.5	8.0	7.4	7.0	8.0	7.0	43.90	7.32
							Y..132.70	$\bar{Y}$.. 4.42

Cuadro 8.4 Número de plantas de frijol a los 30 días por unidad experimental (X).

TRATA-MIENTOS (i)	OBSERVACIONES (j) 1	2	3	4	5	6	$X_{i.}$	$\bar{X}_{i.}$
A	20	19	21	20	22	24	126	21.00
B	20	21	22	22	23	23	131	21.83
C	25	26	25	26	25	27	154	25.67
D	27	28	28	29	30	31	173	28.83
E	37	38	40	39	38	35	227	37.83
							X.. 811	$\bar{X}$.. 27.03

Factores de corrección:

Para SCy : $FC = (132.7)^2/30 = 586.98$

Para SCx : $FC = (811)^2 / 30 = 21924.03$

Para SPxy: $FC = (132.7 \times 811)/30 = 3587.32$

$$tyy = \frac{20.9^2 + 20.5^2 + \dots\dots\dots\dots + 43.9^2}{6} - FC$$

$$= 653.89 - 586.98 = 66.91$$

$Tyy = 2.9^2 + 3.5^2 + ... + 7.0^2 - FC$

$= 659.27 - 586.98 = 72.29$

eyy = Por diferencia

$= 72.29 - 66.91 = 5.38$

PARA:

$$txx = \frac{126^2 + 131^2 + ... + 227^2}{6} - FC$$

$= 23035.17 - 21924.03 = 1111.14$

$Txx = 20^2 + 19^2 + ... + 35^2 - FC$

$= 23087.00 - 21924.03 = 1162.97$

exx = Por diferencia

$= 1162.97 - 1111.14 = 51.83$

PARA:

$$txy = \frac{(20.9 \times 126) + (20.5)(131) + ... + (43.9)(227)}{6} - FC$$

$= 3847.88 - 3587.32 = 260.56$

$Txy = (2.9 \times 20) + (3.5)(19) + ... + (7.0)(35) - FC$

$= 3850.10 - 3587.32 = 262.78$

exy = Por diferencia

$= 262.78 - 260.56 = 2.22$

Luego S.C. debido a regresión para:

Error = $(2.22)^2 / 51.83 = 0.10$
Total = $(262.78)^2/1162.97 = 59.38$
trat. = Por diferencia = 59.28

Los datos restantes se sacan por simple deducción de cuadro de ANACOVA
Reemplazando valores tenemos el cuadro final:

Cuadro 8.5 Análisis de covariancia final (resultados)

F.V.	GL	SCy	SPxy	SCx	SC debido a regres.	S.C. Ajust.	G.L. Ajust.	C.M. Ajust.	F Ajustado
trat.	4	66.91	260.56	1111.14	59.28	7.63	4	1.91	8.68
error	25	5.38	2.22	51.83	0.10	5.28	24	0.22	
Total	29	72.29	262.78	1162.97	59.38	12.91	28		

$$b_{yx} = \frac{exy}{2xx} = \frac{2.22}{51.83} = 0.04283$$

$$s^2_{yx} = 0.22$$

F_t con G.L. de trat. (4) y error (24) = 2.78. El resultado es significativo ($F_0 > F_t$) e induce a rechazar la hipótesis nula.

Cuadro 8.6 Ajuste de promedios de tratamientos

Trat.	$\bar{X}_{i.}$	$(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})$	$b(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})$	$\bar{Y}_{i.}$	$\hat{Y}_{i.}$
A	21.00	- 6.03	-0.258	3.48	3.738
B	21.83	- 5.20	-0.223	3.42	3.643
C	25.67	- 1.36	-0.058	3.48	4.343
D	28.83	1.80	0.077	4.42	4.343
E	37.83	10.80	0.463	7.32	6.857
$\bar{X}$	27.03	0.00	0.000	4.42	4.420

i) $s_{\bar{d}} = \sqrt{0.22\ \frac{2}{6} + \frac{(21.00 - 21.83)^2}{51.83}} = 0.2761$

ii) $s_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{2(0.22)}{6}\cdot 1 + \frac{1111.14}{4(51.83)}} = 0.6829$

8.2 COVARIANZA EN DISEÑO DE BLOQUES AL AZAR

8.21 MODELO ESTADISTICO: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \rho_j + \beta(X_{ij} - \bar{X}) + \varepsilon_{ij}$

donde:

τ_i = efecto del tratamiento $i = \{1, 2, 3, \ldots\ldots, t\}$

ρ_j = efecto de bloque $j = \{1, 2, \ldots\ldots\ldots, n\}$

β = coeficiente de regresión

ε_{ij} = componente del error

8.22 DATOS: Se tabulan en forma similar a la covarianza en diseño irrestricto al azar.

8.23 ANALISIS DE COVARIANCIA: Se construye un cuadro con las sumas de cuadrados de X, Y y XY y los ajustes respectivos.

Cuadro 8.7 Análisis de covariancia X-Y

F.V.	G.L.	SCx	SPxy	SCy	S.C. debido a regresión
Bloques	n - 1	Bxx	Bxy	Byy	
tratam	t - 1	txx	txy	tyy	
error	(n-1)(t-1)	exx	exy	eyy	$(exy)^2$ / exx
t + error	nt - n	txx+exx	txy+exy	tyy+eyy	$(txy+exy)^2/(txx+exx)$
Total		Txx	Txy	Tyy	

Continuación Cuadro 8.7

F.V.	S.C. Ajustado	G.L. Ajustado	C.M. Ajustado	F Ajust.
Bloques				
tratam.	Diferencia	t - 1	SC.t/G.L.	CMt/CME
error	$eyy-(exy)^2/exx$	(n-1)(t-1)-1	SC.e/G.L.	
t + error	1/			

1/ $(tyy + eyy) - (txy + exy)^2/txx + exx$

Ejemplo 8.2 Covariancia simple para bloques al azar.

Cuadro 8.8 Rendimiento de 5 variedades de frijol (Kg/parcela de $10m^2$) (Y)

TRATA-	BLOQUES						
MIENTOS	I	II	III	IV	V	$Y_{i.}$	$\bar{Y}_{i.}$
A	1.72	1.75	2.04	1.25	1.02	7.78	1.56
B	1.75	1.60	2.25	1.54	1.35	8.49	1.70
C	1.76	1.50	2.29	1.50	1.45	8.50	1.70
D	1.79	1.75	2.40	1.53	1.55	9.02	1.80
E	2.00	1.80	2.45	1.58	1.32	9.15	1.83
$X_{.j}$	9.02	8.40	11.43	7.40	6.69	42.94	1.72

Cuadro 8.9 Número de plantas de 5 variedades de frijol (X)

TRATA-	BLOQUES						
MIENTOS	I	II	III	IV	V	$X_{i.}$	$\bar{X}_{i.}$
A	13	12	13	12	14	64	12.80
B	19	16	17	18	15	85	17.00
C	19	18	20	17	17	91	18.20
D	24	23	25	23	22	117	23.40
E	30	29	30	28	28	145	29.00
$Y_{.j}$	105	98	105	98	96	502	20.08

Factores de corrección: Para SCy : $FC = \frac{42.94^2}{25} = 73.75$

Para Scx : $FC = \frac{502}{25} = 10080.16$

Para SPxy : $FC = \frac{42.94 \times 502}{25} = 862.24$

Sumas de cuadrados:

$$Byy = \frac{(9.02)^2 + ... + (6.69)^2}{5} - FC$$

$$= 76.42 - 73.75 = 2.67$$

$$tyy = \frac{(7.78)^2 + ... + (9.15)^2}{5} - FC$$

$$= 73.79 - 73.75 = 0.24$$

$$eyy = 1.72^2 + ... + 1.32^2 - 76.42 - 73.99 + 73.75$$

$$= 0.20$$

$$tyy + eyy = 0.44$$

Luego:

$$Bxx = \frac{105^2 + ... + 96^2}{5} - FC$$

$$= 10094.8 - 10080.16 = 14.64$$

$$txx = \frac{64^2 + ... + 145^2}{5} - FC$$

$$= 10863.20 - 10080.16 = 783.04$$

$$exx = 13^2 + ... 26^2 - 10094.8 - 10863.2 + 10080.16 = 14.16$$

$$txx + exx = 797.20$$

Para:

$$Bxy = \frac{(9.02 \times 105) + (6.69 \times 96)}{5} - FC$$

$$= 867.58 - 862.24 = 5.34$$

$$txy = \frac{(7.78 \times 64) + \ldots\ldots + (9.15 \times 145)}{5} - FC$$

$$= 875.03 - 862.24 = 12.79$$

$$exy = (1.72 \times 13) + \ldots. + (1.32 \times 20) - 875.58 - 875.03 + 862.24$$

$$= 867.58 + 862.24 = 0.35$$

$$txy + exy = 12.44$$

Todos los demás resultados, son derivados de los primeros por simple reemplazo de fórmulas, en el cuadro de ANACOVA.

Cuadro 8.10 Resultado numérico del análisis de covariancia final

F.V.	G.L.	SCy	SPxy	SCx	S.C. debido a regres.	S.C. Aj.	G.L. Aj.	C.M. Aj.	F Aj.
Bloque	4	2.67	5.34	14.64					
trat.	4	0.24	12.79	783.04	0.186	0.05	4	0.012	1.0
error	16	0.20	-0.35	14.16	0.008	0.19	15	0.012	
t + error	20	0.44	12.44	797.20	0.194	0.24	19		

$$b_{yx} = \frac{exy}{exx} = \frac{-0.35}{14.16} = -0.02472$$

$$s^2_{yx} = 0.012$$

8.24 AJUSTE DE PROMEDIO DE TRATAMIENTOS: El ajuste por covarianza se realiza utilizando la relación:

$$\hat{\bar{Y}}_{i.} = \bar{Y}_{i.} - b_{yx} (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})$$

Cuadro 8.11 Ajuste de promedios de tratamientos

TRAT.	$\bar{X}_{i.}$	$(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})$	$b(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})$	$\bar{Y}_{i.}$	$\hat{Y}_{i.}$
A	12.80	- 7.28	0.180	1.56	1.38
B	17.00	- 3.08	0.026	1.70	1.62
C	18.20	- 1.88	0.046	1.70	1.65
D	23.40	3.32	0.082	1.80	1.80
E	29.00	8.92	0.220	1.83	2.05
$\bar{X}$	20.08	0.00	0.000	1.72	1.72

8.3 COVARIANZA EN DISEÑO CUADRADO LATINO.

Es una extensión de los casos anteriores.

8.31 MODELO ESTADISTICO:

$$Y_{ij(k)} = \mu + \alpha_i + \rho_j + \tau_{(k)} + \beta(\bar{X}_{ij(k)} - \bar{X}) + \varepsilon_{ij(k)}$$

donde:

α_i = efecto de hilera $i = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n\}$

ρ_j = efecto de columna $j = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n\}$

$\tau_{(k)}$ = efecto de tratamiento $(k) = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n\}$

β = coeficiente de regresión

$\varepsilon_{ij(k)}$ = Componente del error

8.32 ANALISIS DE COVARIANZA: Se construye el cuadro con base en las sumas de cuadrados de X , Y, XY de hileras, columnas, tratamiento, error y tratamiento más error.

Cuadro 8.12 Análisis de covarianza X-Y

F.V.	G.L.	Scx	SPxy	SCy	SC debido a regresión
Hileras	n - 1	Hxx	Hxy	Hyy	
Columnas	n - 1	Cxx	Cxy	Cyy	
tratam.	n - 1	txx	txy	tyy	Diferencia
error	(n-1) (n-2)	exx	exy	eyy	exy^2/exx
t+error	$(n - 1)^2$	txx+exx	txy+exy	tyy+eyy	$(txy+exy)^2/(txx + exx)$

F.V.	S.C. ajustado	G.L. ajustado	C.M. ajustado	F ajustado
Hileras				
Columnas				
tratam.	Diferencia	n - 1	SCt/G.L.	CMt/CME
error	$eyy-exy^2/exx$	(n-1) (n-2)-1	SCE/G.L.	
t+error	2/	n(n - 2)		

2/ $(tyy + eyy) - (txy + exy)^2 / (txx + exx)$

Ejemplo 8.3 Covariancia simple para cuadrado latino.

Cuadro 8.13 Peso de la materia seca de frijol a los 30 días por unidad experimental en gramos (Y).

HILERAS	COLUMNAS 1	2	3	4	SUMA $Y_{i.}$
1	6.3 A	6.8 B	7.5 C	8.1 D	28.70
2	8.9 D	7.5 A	7.9 B	8.4 C	32.70
3	7.5 C	8.0 D	6.0 A	6.2 B	27.70
4	9.4 B	9.9 C	10.5 D	8.0 A	37.80
$X_{.j}$	32.1	32.2	31.9	30.7	126.90

TRATAMIENTOS	SUMA Y.	MEDIA $\bar{Y}$.
A	27.80	6.9
B	30.30	7.5
C	33.30	8.3
D	35.50	8.8
Σ:	126.90	7.8

Cuadro 8.14 Número de plantas de frijol (X)

HILERAS	COLUMNAS 1	2	3	4	SUMA $X_{i.}$
1	8 A	24 B	26 C	30 D	88
2	31 D	9 A	25 B	26 C	91
3	27 C	32 D	9 A	24 B	92
4	26 B	28 C	34 D	10 A	98
$Y_{.j}$	92	93	94	90	369.

TRATAMIENTOS	SUMA X.	MEDIA $\bar{X}$.
A	36.00	9.0
B	99.00	24.7
C	107.00	26.7
D	127.00	31.7
Σ:	369.00	23.0

Factores de corrección: Para SCy: $FC = (126.9)^2/16 = 1006.48$

Para SCx: $FC = (369)^2/16 = 8510.06$

Para SPxy: $Fc = 126.9x369/16 = 2926.63$

Sumas de cuadrados:

$$Hyy = \frac{(28.70)^2 + \ldots\ldots\ldots + (37.80)^2}{4} - FC$$

$$= 1022.28 - 1006.48 = 15.80$$

$$Cyy = \frac{(32.10)^2 + \ldots\ldots\ldots + (30.70)^2}{4} - FC$$

$$= 1006.84 - 1006.48 = 0.36$$

$$tyy = \frac{(27.80)^2 + \ldots\ldots\ldots + (35.50)^2}{4} - FC$$

$$= 1015.02 - 1006.48 = 8.54$$

$$eyy = (6.3)^2 + \ldots\ldots + (8.0)^2 - 1022.28 - 1006.84 - 1015.02 + 2FC$$
$$= 0.35$$

txx + exx = 8.89

Para:

$$Hxx = \frac{(88)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (98)^2}{4} - FC$$

$$= 8523.25 - 8510.06 = 13.19$$

$$Cxx = \frac{(92)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (90)^2}{4} - FC$$

$$= 8512.25 - 8510.06 = 2.19$$

$$txx = \frac{(36)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (127)^2}{4} - FC$$

$$= 9668.75 - 8510.06 = 1158.69$$

$$exx = 8^2 + \ldots\ldots + 10^2 - 8523.25 - 8512.25 - 9668.75 + 2FC$$

$$= 0.87$$

tyy + eyy = 1159.56

Finalmente:

$$Hxy = \frac{(28.70 \times 88) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (37.80 \times 98)}{4} - FC$$

$$= 2938 - 2926.63 = 11.90$$

$$Cxy = \frac{(32.10 \times 92) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (30.70 \times 90)}{4} - FC$$

$$= 2927.35 - 2983.63 = 0.72$$

$$txy = \frac{(27.80 \times 36) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (35.50 \times 127)}{4} - FC$$

$$= 3018.03 - 2926.63 = 91.40$$

exy = (6.3)(8) + ... + (8.0 x 10) - 2938.53 - 2927.35

- 3018.03 + 2FC = 0.15

txy + exy = 91.55

Los demás resultados son obtenidos por simple reemplazo de valores.

Cuadro 8.15 Resultados de la covariancia simple para cuadrado latino

F.V.	G.L.	SCy	SPxy	SCy	SC debido a regres.	S.C. Ajust.	G.L. Ajust.	C.M. Ajust.	F Ajust.
Hileras	3	15.80	11.90	13.19					
Columna	3	0.36	0.72	2.19					
Tratam.	3	8.54	91.40	1158.69	7.20	1.34	3	0.45	7.50
Error	6	0.35	0.15	0.87	0.03	0.32	5	0.06	
T + E	9	8.89	91.55	1159.56	7.23	1.66	8		

$$bxy = \frac{exy}{exx} = \frac{0.15}{0.87} = 0.17241$$

F con G.L. de tratamientos (3) y error (5) = 5.41. El resultado es significativo ($F_0 > F_t$) e induce a rechazar la hipótesis nula.

8.33 AJUSTE DE PROMEDIO DE TRATAMIENTOS: Se realiza conforme a la fórmula.

$$\hat{Y}_{i.(k)} = \bar{Y}_{i.(k)} - byx(\bar{X}_{i.(k)} - \bar{X}_{..(.)})$$

Cuadro 8.16 Ajuste de promedios en cuadrado latino

TRATA.	$\bar{X}_{i.(k)}$	$(\bar{X}_{i.(k)} - \bar{X}_{..(k)}$	$b(\bar{X}_{i.(k)} - \bar{X}_{..(k)}$	$\bar{Y}_{i.(k)}$	$\hat{Y}_{i.(k)}$
A	9.0	- 14.00	- 2.41	6.9	9.31
B	24.7	1.70	0.29	7.5	7.21
C	26.7	3.70	0.64	8.3	7.66
D	31.7	8.20	1.50	8.8	7.30
$\bar{X}$	23.0	0.03	0.01	7.8	7.80

EDITORIAL IICA